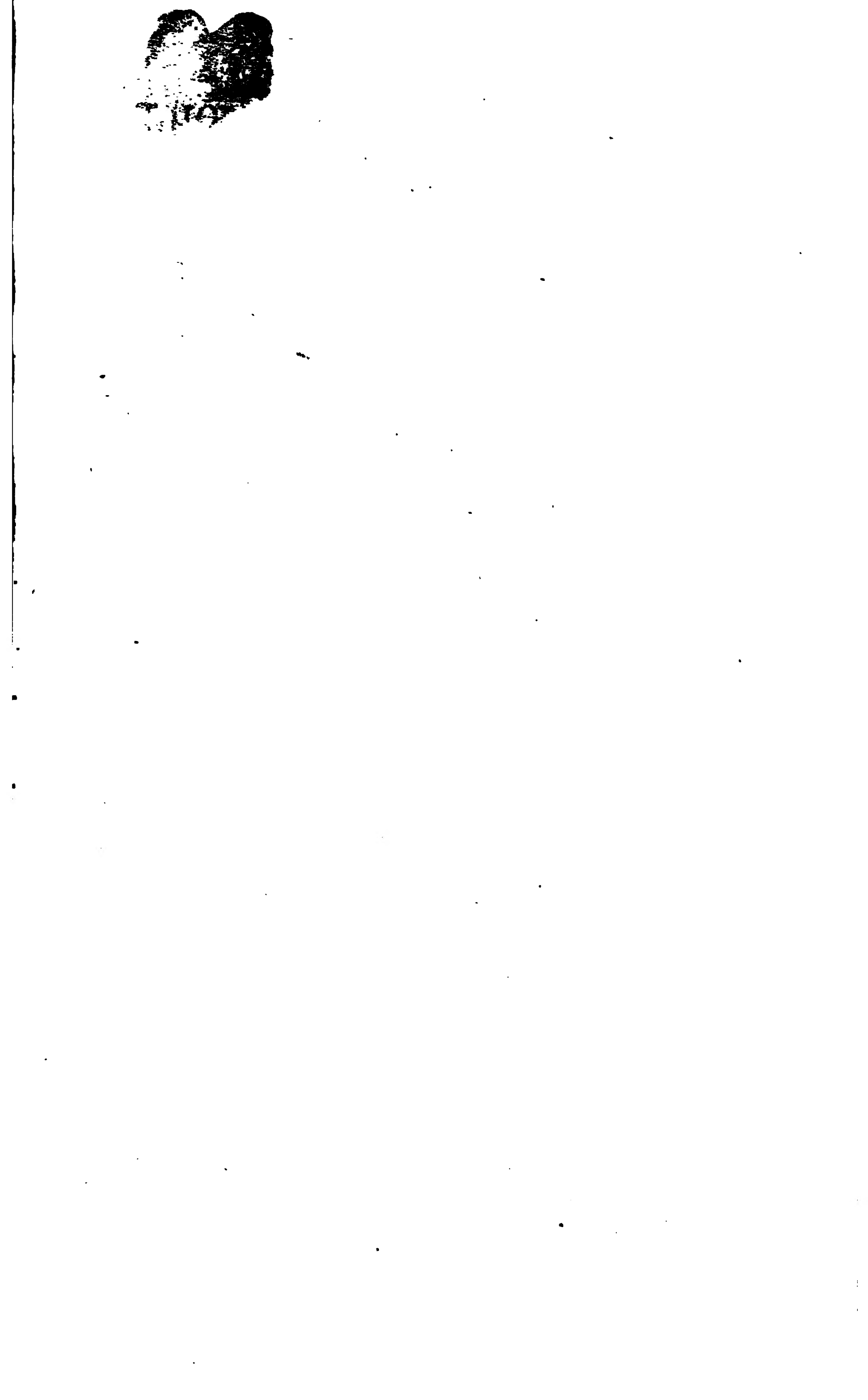
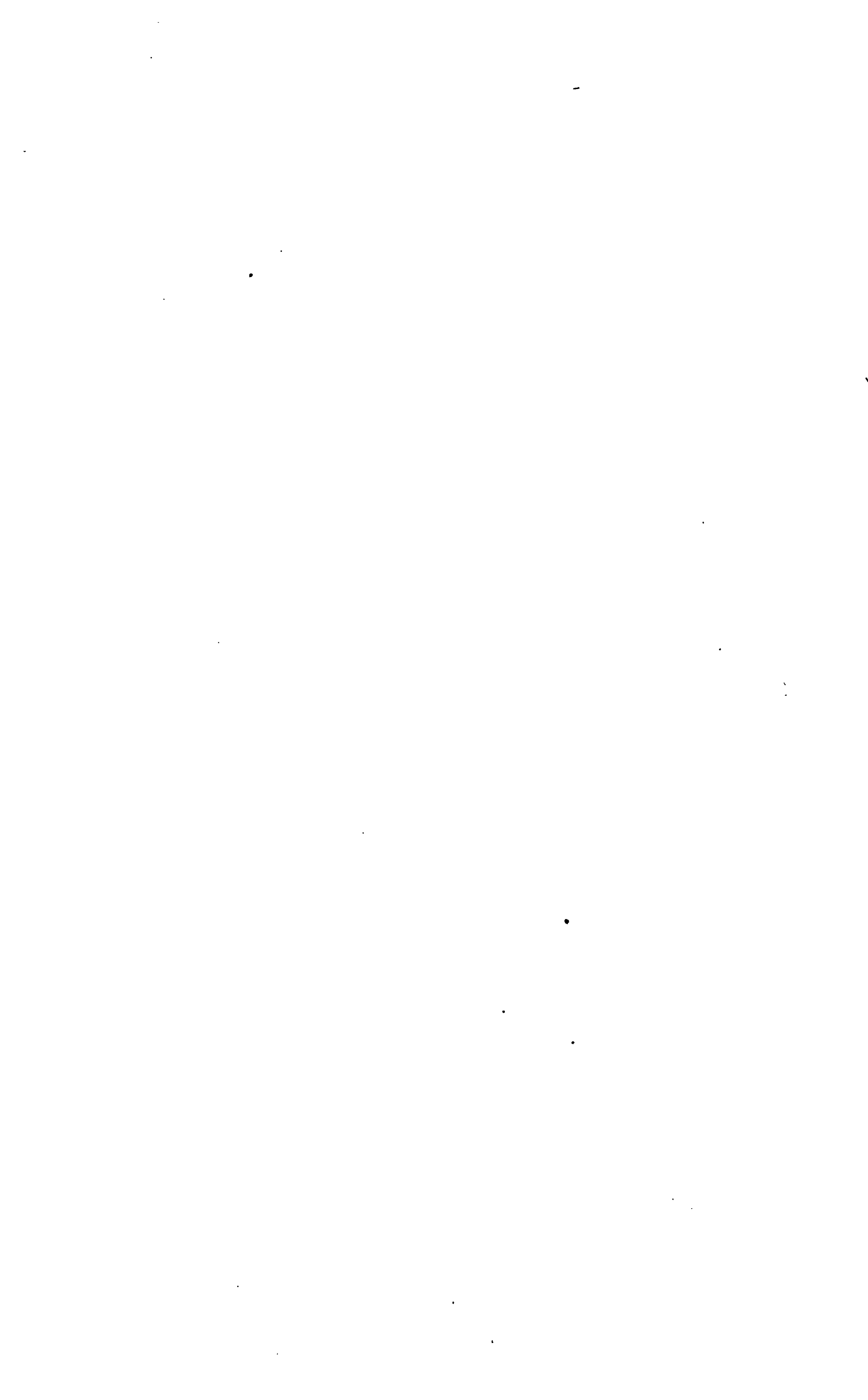








J.-A. SERRET.

LEHRBUCH

DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS DEUTSCH BEARBEITET VON

AXEL HARNACK.

ZWEITE, DURCHGESEHENE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN VON

GEORG BOHLMANN UND ERNST ZERMELO.

DRITTER BAND.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND VARIATIONS-RECHNUNG.

MIT 38 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Vorwort.

Der vorliegende dritte und letzte Band des Serret-Harnackschen Werkes enthält als ersten Teil die Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen, als zweiten Teil die partiellen Differentialgleichungen und die Variationsrechnung. Im Anhang ist zunächst aus der alten Auflage die Harnacksche Note über das Existenztheorem in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen wieder abgedruckt. Es folgen dann wie bei den beiden ersten Bänden Schlufsbemerkungen mit Litteraturnachweisen und ein Register für den dritten Band.

Der Stoff, welcher im vorliegenden dritten Bande behandelt wird, ist im grofsen und ganzen der alte geblieben; wesentlich geändert ist aber die Disposition und infolgedessen auch vielfach die Form und Anordnung der Darstellung.

Was den Inhalt des ersten Teils anlangt, so beginnt dieser — um das Verständnis zu erleichtern — mit den Differentialgleichungen erster Ordnung. Das erste Kapitel bringt die Existenztheoreme und an sie anschliefsend eine wesentlich geometrisch gehaltene Diskussion der singulären Lösungen, das zweite Kapitel enthält die üblichen Integrationsmethoden und nimmt dabei — die Bemerkungen Harnacks verwertend — auf die geometrischen und die von Lie eingeführten Methoden besondere Rücksicht. Analog behandelt das dritte Kapitel die Existenztheoreme und die singulären Lösungen von Differentialgleichungs-Systemen, wobei die Beziehungen zur geometrischen Theorie der Kurvenkongruenzen so weit berücksichtigt sind, als dies ohne zu weites Eingehen in flächentheoretische Untersuchungen möglich war. Das vierte Kapitel behandelt die elementaren Integrationsmethoden bei Differentialgleichungen höherer Ordnung und bringt gegen die frühere Auflage nichts Neues. Das gleiche gilt vom fünften Kapitel, welches die formale, elementare Theorie der linearen Differentialgleichungen

entwickelt. Erweitert ist aber die Darstellung der funktionentheoretischen Untersuchung dieser Gleichungen im sechsten Kapitel. Hier wird zunächst die Existenz eines Fundamentalsystems an einer regulären Stelle durch Reihenentwickelung bewiesen und sodann durch das analoge Verfahren auch die Existenz einer Partikularlösung an einer singulären Stelle der Bestimmtheit. Das Auftreten von Logarithmen wird wenigstens durch Beispiele erläutert.

Der zweite Teil behandelt im siebenten Kapitel die Theorie der partiellen und totalen Differentialgleichungen erster Ordnung, im achten ausgewählte partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung. Beide Kapitel sind inhaltlich fast ungeändert geblieben bis auf die neu hinzugefügten Existenzbeweise für Systeme von partiellen Differentialgleichungen im § 5 des siebenten Kapitels.

Ganz neu bearbeitet ist dagegen das neunte Kapitel über Variationsrechnung. Eine systematische Darstellung dieser Disziplin auf moderner Grundlage konnte in dem hier zur Verfügung stehenden Raume natürlich nicht geboten werden. Es wurde vielmehr wie im französischen Originale und in der ersten Auflage der Übersetzung als erreichbares Ziel festgehalten die Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen für den Fall einfacher Integrale unter Berücksichtigung solcher Nebenbedingungen, die in den praktisch wichtigen Fällen vorzugsweise in Betracht kommen. Dagegen wurde, wie bisher, auf die Behandlung der Doppelintegrale und auf die Diskussion der Frage, wann eine Lösung der Differentialgleichung wirklich ein Maximum oder Minimum liefert, also auf die Theorie der zweiten Variation und überhaupt der hinreichenden Kriterien, grundsätzlich verzichtet. In der Darstellung handelte es sich wesentlich darum, dem Leser anstatt formaler Allgemeinheiten vielmehr einen klaren Einblick in das Wesen der Probleme und Methoden zu geben, und es wurden daher, unbekümmert um die Allgemeinheit, immer so viel Voraussetzungen über die Beschaffenheit der vorkom-

menden Funktionen gemacht, wie zu einem gleichzeitig einfachen und strengen Beweise erforderlich schienen. Die einzelnen Probleme wurden immer erst im einfachsten Falle behandelt und durch Beispiele erläutert und erst nachträglich auf allgemeinere Fälle ausgedehnt.

Von einer Bearbeitung des Zahlbegriffes und der damit im Zusammenhang stehenden prinzipiellen Fragen, wie sie ursprünglich für den Schlufs des Werkes in Aussicht genommen war, ist aus verschiedenen Rücksichten vorläufig abgesehen worden. Es wird vielmehr beabsichtigt, eine Darstellung dieser Gegenstände in die bevorstehende Neuauflage des ersten Bandes an geeigneter Stelle aufzunehmen.

Die am Ende gegebenen „Bemerkungen“ sind hauptsächlich dazu bestimmt, dem Studierenden, der einzelne im Text nur gestreifte Probleme weiter zu verfolgen wünscht, durch Litteraturnachweise Gelegenheit zu eingehenderem Studium zu bieten, und es wurde unter diesem Gesichtspunkte solchen Lehrbüchern, die sich zur Einführung in die betreffenden Gebiete eignen, vor den Originalarbeiten, die meist eine gröfsere Reife voraussetzen, der Vorzug gegeben.

Das neunte Kapitel über Variationsrechnung sowie der gesamte Anhang sind der Hauptsache nach von dem zweiten Unterzeichneten allein bearbeitet worden, nachdem der erste Herausgeber seit dem Herbst 1902 seine akademische Thätigkeit mit einer praktischen vertauscht hatte.

Herrn Dr. Blumenthal, der uns bei den Korrekturen bereitwilligst unterstützte, sind wir zu grofsem Danke verpflichtet, sowie auch Herrn cand. math. Schimmack, der uns eine Sammlung von Berichtigungen zu den früheren Bänden zur Verfügung gestellt hat.

Berlin und Göttingen, im Januar 1904.

G. Bohlmann. E. Zermelo.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.
Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Erstes Kapitel.
Allgemeine Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zweites Kapitel.
Integrationsmethoden bei Differentialgleichungen erster Ordnung.

Drittes Kapitel.

Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen.

Viertes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Fünftes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen. Grundlagen.

Sechstes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen. Integration durch Reihen oder bestimmte Integrale.

Zweiter Teil.

Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung.

Siebentes Kapitel.

Die partiellen und die totalen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Achtes Kapitel.

Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Neuntes Kapitel.

Variationsrechnung.

Erster Teil.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.



Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung.

---

§ 1. Grundbegriffe.

657. Einteilung der Differentialgleichungen. Jede Gleichung, welche mehrere Variabele enthält, und in welcher die Differentiale oder die Ableitungen dieser Variabelen von irgend welchen Ordnungen vorkommen, heifst allgemein eine *Differentialgleichung*. Hängen die Variabelen, welche in eine Differentialgleichung eingehen, nur von *einer einzigen* unter ihnen ab, so ist die Gleichung eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Wenn dagegen die abhängigen Variabelen Funktionen von *mehreren* unabhängigen sind, so heifst die Gleichung eine *partielle* oder eine *totale Differentialgleichung*, je nachdem die partiellen Ableitungen oder die totalen Differentiale der Variabelen, welche als abhängige zu betrachten sind, auftreten.

Statt einer Differentialgleichung kann man auch mehrere betrachten, welche gleichzeitig gelten sollen. Man spricht dann von einem *Systeme simultaner Differentialgleichungen*. Die höchste Ordnung der Ableitungen, die in einer Differentialgleichung oder in einem Systeme auftreten, heifst die *Ordnung* der Differentialgleichung oder des Systems.

Eine Differentialgleichung oder ein System von solchen *integrieren* heifst die Funktionen finden, die die Gleichung oder das System *identisch*, d. h. für beliebige Werte der unabhängigen Variabelen, befriedigen. Die Gleichungen, welche die Integration leisten, heifsen *Integralgleichungen* oder Integrale, die gesuchten Funktionen *Lösungen* der Gleichung oder des Systems (vergl. Nr. 658, 723 und 734).

Wir beschränken uns in diesem und dem folgenden Kapitel auf den Fall einer einzigen Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen.

658. Die Differentialgleichung erster Ordnung. Die Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form:

$$F(x, y, y') = 0; \tag{1}$$

x soll hier als unabhängige, y als die abhängige Veränderliche betrachtet werden und y' die Ableitung von y nach x bedeuten. In Nr. 77 des ersten Bandes wurde gezeigt, wie durch Elimination von willkürlichen Konstanten Differentialgleichungen entstehen. Im besonderen führt eine Gleichung mit einer willkürlichen Konstanten C:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, die also die Form (1) hat. Differentiiert man nämlich die Gleichung (2), so wird:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \tag{3}$$

und die Differentialgleichung erscheint als das Resultat der Elimination von C aus (2) und (3), (2) als ihre *Integralgleichung*.

Hat man nun umgekehrt zu der gegebenen Differentialgleichung (1) auf irgend einem Wege eine Gleichung der Form (2) gefunden, so ist (2) eine Integralgleichung von (1), und zwar heifst sie *vollständig* oder *allgemein*, weil sie die willkürliche Konstante C enthält. Bestimmt wird die willkürliche Konstante durch die „*Anfangsbedingungen*“. Verlangt man nämlich, dafs für einen gegebenen Wert $x = x_0$ der unabhängigen Variabelen, y einen vorgeschriebenen Wert y_0 annimmt, so ist C aus der Gleichung:

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0 \tag{2^0}$$

zu berechnen.

Die einem speziellen Werte der Konstanten entsprechende Integralgleichung heifst eine *partikulare* Integralgleichung. Erscheint die Integralgleichung nach der willkürlichen Konstanten aufgelöst in der Form:

$$\psi(x, y) = C,$$

so nennt man die Funktion ψ ein *Integral*. Ist sie nach der abhängigen Variabelen aufgelöst:

$$y = \varphi(x, C),$$

so nennt man φ eine *Lösung* der Differentialgleichung. Je nachdem C willkürlich gelassen oder speziell gewählt wird, nennt man das Integral oder die Lösung eine *vollständige* (auch *allgemeine*) oder eine *partikulare*. Integralgleichungen, Integrale und Lösungen, die nicht durch Spezialisierung der willkürlichen Konstanten gefunden werden können, heifsen *singuläre*.

Es erhebt sich nun allerdings die Frage, ob eine Differentialgleichung auch solche Integralgleichungen besitzt. Dies werden wir später untersuchen. Vorerst wollen wir die geometrische Bedeutung einer Differentialgleichung erörtern.

659. Geometrische Deutung. Deutet man die *reellen* Variabelen x, y als rechtwinklige Koordinaten der Ebene, so wird durch jede Gleichung zwischen x und y eine Kurve, durch das allgemeine Integral (2) also eine einfach unendliche Kurvenschar mit dem Parameter C dargestellt. Die Anfangsbedingung (2^0) drückt dann aus, dafs unsere Integralkurve durch einen vorgeschriebenen Punkt (x_0, y_0) gehen soll. Dagegen giebt die Differentialgleichung (1) eine Beziehung zwischen den Koordinaten (x, y) eines Punktes auf einer Integralkurve und der zugehörigen Tangentenrichtung, die durch den Wert von y' bestimmt wird. Hierbei ist es zweckmäfsig, den Begriff des *Linienelementes* einzuführen.

Unter einem *Linienelemente* (x, y, p) versteht man die geometrische Figur, welche aus einem Punkte und einer durch ihn gehenden Geraden besteht, wobei man mit (x, y) die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes und mit p den Tangens des Winkels bezeichnet, den die Gerade mit der positiven x-Axe bildet.

Betrachtet man im besonderen einen Punkt auf einer Kurve, so kann man die Gerade des Linienelementes mit der Tangente im Kurvenpunkte zusammenfallen lassen, also $p = y'$

setzen. Dann heifst (x, y, y') ein *Linienelement der Kurve.* Die Ebene enthält also dreifach unendlich viele, oder, wie man schreibt, ∞^3 Linienelemente, die Linienelemente einer Kurve bilden eine einfach unendliche Schar. Eine Gleichung

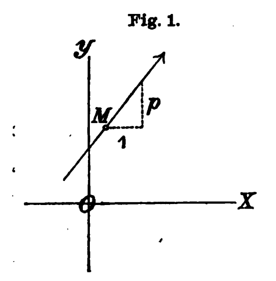


Fig. 1.

$$(1a) \qquad F(x, y, p) = 0$$

sondert aus den ∞^3 Linienelementen der Ebene ∞^2 bevorzugte aus, und die Aufgabe, die Differentialgleichung (1) zu integrieren, kommt darauf hinaus, die Kurven zu bestimmen, denen diese bevorzugten Linienelemente angehören. Ein allgemeines Integral (2) der Differentialgleichung finden, heifst, diese ∞^2 Linienelemente zu einer einfach unendlichen Schar von je ∞^1 Linienelementen anordnen, die immer die Linienelemente einer Kurve bilden. Jede solche Kurve heifst eine *Integralkurve.*

Die soeben vorgetragene geometrische Interpretation ist ihrer Natur nach auf den Fall beschränkt, dafs die vorkommenden Gröfsen sämtlich *reell* sind. Es ist aber bequem, die geometrische Redeweise gelegentlich auch dann beizubehalten, wenn x, y, y' oder p imaginäre und komplexe Werte annehmen. Man spricht dann von imaginären Punkten, Kurven, Geraden, Richtungen, Linienelementen.

§ 2. Das Existenztheorem.

660. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Wir wenden uns nunmehr zur Untersuchung der in Nr. 658 aufgestellten Frage, ob zu einer vorgelegten Differentialgleichung auch immer eine vollständige Lösung oder eine partikulare Lösung mit willkürlich vorgeschriebenen Anfangswerten gehört. Wir beschränken uns dabei zunächst auf den Fall, wo die Gleichung nach y' aufgelöst, also in der Form gegeben ist

$$(1) \qquad y' = f(x, y).$$

Die Variabelen x, y denken wir uns dabei zunächst komplex, um Anschlufs an die Sätze der Funktionentheorie

(Nr. 639—643) zu gewinnen, und können so das folgende Theorem beweisen:

Satz I. Es sei $f(x, y)$ eine analytische Funktion ihrer beiden Argumente, welche in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ regulär ist. Dann giebt es immer eine und nur eine analytische Funktion y von x, $x = \varphi(x, y_0)$, welche in der Umgebung der Stelle x_0 regulär ist, der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ genügt und für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt.

Den Beweis dieses Satzes führen wir so, daſs wir zunächst für y eine Reihenentwickelung nach Potenzen von $x - x_0$ rein formal ansetzen, dann die Koeffizienten berechnen und hierauf die Konvergenz der erhaltenen Reihe nachweisen.

Soll nämlich die analytische Funktion y von x in der Umgebung von x_0 regulär sein, so gilt dort nach Nr. 372 die Taylorsche Entwickelung:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + y''_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots, \tag{2}$$

wenn $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$ die Werte der Funktion und ihrer successiven Ableitungen an der Stelle x_0 bezeichnen.

Mit der Differentialgleichung (1) müssen aber auch die sämtlichen durch Differentiation aus ihr entstehenden Gleichungen in der Umgebung von x_0, also auch an der Stelle x_0 selbst erfüllt sein:

$$\tag{3} \begin{cases} y'_0 = f(x_0, y_0), \\ y''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y'_0, \\ y'''_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 y'^2_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y'^2_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y''_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dabei sind die eingeklammerten Ausdrücke, wie der Index 0 andeutet, an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ zu nehmen. Aus diesen Gleichungen kann man die Werte von $y', y''_0, \ldots$ successive eindeutig bestimmen, sobald x_0 und y_0 gegeben sind, und daraus folgt, daſs die Funktion y, wenn sie überhaupt existiert, nur *eine* bestimmte sein kann.

Demnach hat man zweierlei zu beweisen: *erstens*, dafs die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (2) konvergent ist, solange der Betrag von $x - x_0$ kleiner bleibt als eine positive Zahl r, wenn die Koeffizienten $y'_0, y''_0, \dots$ vermittelst der Gleichungen (3) bestimmt sind; und *zweitens*, dafs diese Funktion y in der That der Differentialgleichung genügt. Gehen wir nun zunächst zu dem *ersten* Teil des Satzes über.

Wir bezeichnen mit M den gröfsten Wert, den $|f(x, y)|$ annimmt, wenn x und y auf den Bereich:

$$|x - x_0| < r, \quad |y - y_0| < \varrho,$$

in welchem $f(x, y)$ noch ausnahmslos regulär sein soll, beschränkt werden. Ferner setzen wir:

$$\psi(x, \eta) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)\left(1 - \frac{\eta - y_0}{\varrho}\right)} \tag{4}$$

und betrachten die Differentialgleichung

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} = \psi(x, \eta). \tag{5}$$

Wir behaupten nun, dafs, solange $|x - x_0|$ eine gewisse Grenze nicht überschreitet, eine und nur eine analytische Funktion η von x existiert, die der Differentialgleichung (5) genügt und sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert. Die Gleichung (5) läfst sich auf die Form bringen:

$$\left(1 - \frac{\eta - y_0}{\varrho}\right)\frac{d\eta}{dx} - \frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{r}} = 0,$$

die man, wie leicht zu sehen, durch Differentiation der Gleichung

$$(\eta - y_0) - \frac{(\eta - y_0)^2}{2\varrho} + Mrl\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right) = 0 \tag{6}$$

gewinnt. Diese Integralgleichung ist vom zweiten Grade in Bezug auf $\eta - y_0$ und hat die Lösung:

$$\frac{\eta - y_0}{\varrho} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2Mr}{\varrho} l\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)}. \tag{6a}$$

η ist also eine analytische Funktion von x und regulär in der Umgebung von $x = x_0$. Soll dabei, für $x = x_0$, η den Wert y_0 annehmen, so mufs der Quadratwurzel das untere Zeichen erteilt werden, und es folgt die Entwickelung:

$$\eta = y_0 + \eta'_0 \frac{(x - x_0)}{1!} + \eta''_0 \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots \tag{7}$$

Der Radikand in (6a) ist regulär und von Null verschieden, solange

$$|x - x_0| < r' = r \cdot \left(1 - e^{-\frac{\varrho}{2Mr}}\right) < r$$

ist. Die Reihe (7) konvergiert also innerhalb eines um x_0 mit dem Radius r' beschriebenen Kreises.

Die Koeffizienten η'_0, η''_0 dieser Entwickelung gewinnt man, indem man die Werte $x = x_0$, $\eta = y_0$ in das System substituiert, welches aus der Gleichung (5) und den durch Differentiation aus ihr abgeleiteten besteht, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} \eta'_0 &= \psi(x, y_0), \\ \eta''_0 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_0 \eta'_0, \\ \eta'''_0 &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \eta}\right)_0 \eta'_0 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right)_0 \eta'^2_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_0 \eta''_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Nach Gleichung (6) der Nr. 656 ist aber für alle $\lambda, \mu = 0, 1, 2 \ldots$:

$$\left|\frac{\partial^{\lambda+\mu} f(x, y)}{\partial x^\lambda \partial y^\mu}\right|_0 \leqq \left(\frac{\partial^{\lambda+\mu} \psi(x, \eta)}{\partial x^\lambda \partial \eta^\mu}\right)_0.$$

Vergleicht man daher das System (3) mit dem Systeme (8), so ergiebt sich successive:

$$\begin{aligned} |y'_0| &\leqq \eta'_0, \\ |y''_0| &\leqq \eta''_0, \\ |y'''_0| &\leqq \eta'''_0, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nach dem Lehrsatz III der Nr. 103 konvergiert daher die Reihe (7) ebenso wie die Reihe (2) in dem Kreise

mit dem Radius r', d. h. für alle x, die der Bedingung genügen:

$$(9) \qquad |x - x_0| < r' = r\left(1 - e^{-\frac{\varrho}{2rM}}\right).$$

Es ist nun noch zu zeigen, daſs die durch Gleichung (2) definierte Funktion y auch der Differentialgleichung (1) genügt. Durch Differentiation von (2) findet man:

$$(2') \qquad y' = y'_0 + y''_0 \cdot \frac{x - x_0}{1!} + y'''_0 \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Andrerseits ist $f(x, y)$, wenn man für y die Reihe (2) einsetzt, eine analytische Funktion von x allein, deren successive Ableitungen für $x = x_0$ wegen (3) mit den Werten $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$ übereinstimmen. Es wird daher allgemein:

$$f_0^{(n)} = \left(\frac{d^n f(x, y)}{dx^n}\right)_0 = y_0^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

und mithin geht (2') über in:

$$y' = f_0 + f'_0 \cdot \frac{x - x_0}{1!} + f''_0 \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots = f(x, y).$$

Also ist y ein Integral der Differentialgleichung (1).

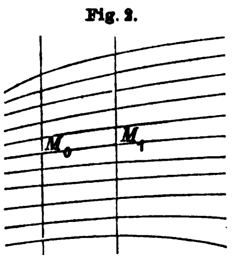
Hiermit ist der Satz dieser Nummer, also das Existenztheorem für den Fall, daſs die Differentialgleichung nach y' aufgelöst ist, bewiesen. Dabei ist noch folgendes zu beachten.

Das Existenztheorem liefert uns zunächst eine partikulare Lösung mit den Anfangswerten (x_0, y_0). Da aber diese keiner anderen Beschränkung unterliegen, als daſs f in ihrer Umgebung regulär ist, so darf y_0 abgesehen von dieser Bedingung *willkürlich* gewählt und daher als die willkürliche Konstante einer vollständigen Lösung (Nr. 658) aufgefaſst werden. Wir sehen daher, daſs eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche von der Form (1) ist und den Voraussetzungen des Existenztheorems genügt, immer eine und nur eine analytische Lösung $y = \varphi(x, y_0)$ besitzt, die sich in der Umgebung von x_0 regulär verhält und für $x = x_0$ einer *willkürlich* vorgeschriebenen Anfangskonstanten gleich wird. Da die Lösung nur ein spezieller Fall der Integralgleichung ist, so ist die Existenz von solchen ebenfalls bewiesen, die Existenz der Inte-

grale (Nr. 658) werden wir aber erst sehr viel später (in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen) und gleich allgemein für irgend ein System von Differentialgleichungen nachweisen.

Natürlich gilt unser Satz, den wir für *komplexe* Variabelen bewiesen haben, im besondern auch für reelle Veränderliche. Ist nämlich $f(x, y)$ eine reelle Funktion der reellen Variabelen x, y, die durch eine Potenzreihe gegeben wird, so gelten dieselben Formeln, und es bestimmen sich die Koeffizienten der Reihenentwickelung (2) aus dem Systeme (3) ebenfalls als reelle Zahlen; wir erhalten so, geometrisch gesprochen, ein Stück der durch den Punkt $M_0(x_0, y_0)$ gehenden Integralkurve. Andrerseits kann man einen Punkt $M_1(x_1, y_1)$ des so gewonnenen Kurvenstückes als neuen Anfangspunkt wählen und auf diesen wieder das Verfahren des Existenztheorems anwenden. Auf diese Weise können wir die Integralkurve so weit *fortsetzen*, bis wir zu einem singulären Punkte der Funktion $f(x, y)$ gelangen. Wir sind also imstande, einen ganzen Bereich der Ebene, in welchem $f(x, y)$ regulär ist, mit Integralkurven zu erfüllen. Die Figur 2 erläutert dies Verfahren.

Fig. 2.



661. Existenz der impliciten Funktion. In Nr. 187 wurde bei der Betrachtung der impliciten Funktion

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

darauf hingewiesen, daſs der Beweis für die Existenz einer solchen Funktion erst nachträglich vermittelst der Theorie der Differentialgleichungen vollständig geführt werden würde. Dieser Nachtrag soll jetzt geliefert werden, indem wir das folgende Theorem beweisen.

Satz II. Es sei $F(x, y)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen x und y, die sich in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ regulär verhält; an derselben Stelle (x_0, y_0) sei $F = 0$, aber nicht $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Alsdann giebt es eine und nur eine analytische Funktion y von x, welche in der Um-

gebung der Stelle x_0 regulär ist, für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und, in die Gleichung $F = 0$ eingesetzt, diese identisch befriedigt.

Wenn eine Funktion y von der verlangten Beschaffenheit existiert, so mufs sie mit der Gleichung (1) auch die durch Differentiation nach x entstehende Gleichung erfüllen:

(2) $$F' = F'_x(x, y) + y' F'_y(x, y) = 0$$
oder
(2a) $$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

wenn mit F'_x und F'_y die partiellen Ableitungen der Funktion F nach x und y bezeichnet werden. Nun ist aber die rechte Seite wieder eine analytische Funktion von x und y (Nr. 654) und regulär in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0), weil der Nenner F'_y nach unserer Annahme dort nicht verschwindet. Also genügt die Differentialgleichung (2) den Voraussetzungen unseres Existenztheorems der vorigen Nummer, und mithin besitzt sie ein analytisches partikulares Integral y, das in der Umgebung von x_0 regulär ist und für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Diese Funktion y von x befriedigt also die Gleichung (2), $\frac{dF}{dx} = 0$, identisch und durch Integration finden wir

$$F(x, y) = \text{const.} = F(x_0, y_0) = 0.$$

So haben wir eine Funktion von den verlangten Eigenschaften gefunden, und diese ist zugleich die einzige, weil auch die Differentialgleichung (2a) nur eine einzige Lösung mit den Anfangswerten x_0, y_0 besitzt.

662. Die implicite Funktion von mehreren Variabelen. Den Existenzbeweis der impliciten Funktion können wir auf den Fall ausdehnen, wo mehrere unabhängige Veränderliche vorhanden sind, und zwar vermöge des folgenden Theorems:

Satz III. Es sei $F(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$ eine analytische Funktion der $n + 1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n, y$, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\ldots$ $x_n = a_n$, $y = y_0$ regulär verhält. An dieser Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_n, y_0)$ selbst soll die Funktion F den Wert Null haben, die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}$ aber von Null verschieden sein. Alsdann giebt es eine und

nur eine analytische Funktion y von $x_1, \dots x_n$, welche an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ den Wert y_0 annimmt, in der Umgebung dieser Stelle regulär ist und, für y in die Gleichung $F = 0$ eingesetzt, diese identisch d. h. für willkürliche Werte der Gröfsen $x_1, \dots x_n$ befriedigt.

Wir beweisen den Satz, indem wir ihn auf den Satz II der vorigen Nummer, d. h. auf den Fall einer einzigen unabhängigen Variabelen zurückführen.

Führen wir nämlich in unsere Gleichung

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, y) = 0 \tag{1}$$

für die Variabelen $x_1, x_2, \dots x_n$ die Werte ein

$$x_1 = a_1 + x\xi_1, \quad x_2 = a_2 + x\xi_2, \dots x_n = a_n + x\xi_n \tag{2}$$

und betrachten die Gröfsen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ als konstant und x allein als veränderlich, d. h. geometrisch gesprochen, lassen wir die Stelle $(x_1, x_2, \dots x_n)$ zwischen den Stellen $(a_1, a_2 \dots a_n)$ und $(a_1 + \xi_1, \dots a_n + \xi_n)$ *geradlinig* variieren, so erhalten wir die Gleichung

$$F(a_1 + x\xi_1, a_2 + x\xi_2, \dots a_n + x\xi_n, y) = \mathsf{F}(x, y) = 0 \tag{1a}$$

und können auf diese unmittelbar das Verfahren der vorigen Nummer anwenden. So erhalten wir für y eine Entwickelung der Form

$$y = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \cdots, \tag{3}$$

welche für alle $|x| < r$ konvergiert, die Gleichung (1a) erfüllt und für $x = 0$ den Wert $\varphi_0 = y_0$ annimmt; denn nach unserer Annahme ist:

$$F(a_1, a_2, \dots a_n, y_0) = \mathsf{F}(0, y_0) = 0.$$

Hier sind freilich die Koeffizienten $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sowie auch der Konvergenzradius r noch abhängig von der Wahl der Gröfsen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$. Sie bestimmen sich aber durch die successiven nach x genommenen Ableitungen der Funktion y an der Stelle $x = 0$, und es ist wie in Nr. 661

$$y' = -\frac{\mathsf{F}'_x}{\mathsf{F}'_y} = -\xi_1 \frac{F_1}{F'_y} - \xi_2 \frac{F_2}{F'_y} \cdots - \xi_n \frac{F_n}{F'_y}, \tag{4}$$

wenn unter $F_1, F_2, \dots F_n$ die partiellen Ableitungen nach $x_1, x_2, \dots x_n$ verstanden werden. Wie man sich nun durch

successive Differentiation leicht überzeugt, werden auch alle höheren Ableitungen $y^{(n)}$ homogene ganze Funktionen n^{ten} Grades der Gröſsen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, wenn man die Substitution $x = 0$ d. h. $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ ausführt. Demnach werden die Glieder $x^n y_0^{(n)}$ wieder homogene Funktionen der Gröſsen

$$x\xi_1 = x_1 - a_1, \quad x\xi_2 = x_2 - a_2, \ldots x\xi_n = x_n - a_n,$$

und die Reihe (3) geht über in eine Potenzreihenentwickelung nach diesen Differenzen, stellt also, soweit sie konvergiert, eine analytische Funktion der n Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ dar, die in der Umgebung von $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ regulär ist.

Bei der Beurteilung des Konvergenzbereiches wollen wir annehmen, daſs die Beträge $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots |\xi_n|$ sämtlich $\leqq 1$ sind, was nach (2) die Allgemeinheit nicht beschränkt, und daſs immer in (4)

$$\left|\frac{F'_x}{F'_y}\right| < M \tag{5}$$

sei für alle $|x_\lambda - a_\lambda| < r$ und für $|y - y_0| < \varrho$. Dann gilt die Ungleichheit (5) auch für $|x| < r$, und nach (9) in Nr. 660 konvergiert die Reihe (3) in einem Kreise

$$|x| < r' = r\left(1 - e^{\frac{\varrho}{2Mr}}\right),$$

für ein beliebiges der Bedingung $|\xi_\lambda| \leqq 1$ genügendes Wertesystem $\xi_1, \ldots \xi_n$. Mithin konvergiert auch unsere schlieſsliche Potenzentwickelung sicher in dem Bereiche

$$|x_1 - a_1| < r', \quad |x_2 - a_2| < r', \ldots, |x_n - a_n| < r';$$

und es ist y in der That eine analytische Funktion der unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und regulär in der Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

663. Die Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$. Wir sind nunmehr imstande, den Existenzbeweis zu führen für die in Nr. 658 betrachtete Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

indem wir beweisen:

Satz IV. Es sei $F(x, y, y')$ eine analytische Funktion der Variabelen x, y, y', die sich in der Umgebung der Stelle x_0, y_0, y' regulär verhält. An dieser Stelle selbst sei $F = 0$,

aber die partielle Ableitung der $\frac{\partial F}{\partial y'}$ *der Funktion nach* y' *von Null verschieden. Alsdann giebt es immer eine und nur eine analytische Funktion* $y = \varphi(x, y_0)$ *von* x, *so dafs für* $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ *wird, während in der Umgebung von* $x = x_0$ y *regulär ist und der Differentialgleichung* $F(x, y, y') = 0$ *genügt.*

Nach Nr. 662 können wir nämlich unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichung (1) nach y' auflösen, also auf die Form bringen

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

wo $f(x, y)$ eine analytische Funktion ist, die in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) regulär ist und an der Stelle selbst den Wert y'_0 annimmt. Diese Gleichung (2) ist also genau von der Beschaffenheit der Differentialgleichung (1) in Nr. 660, und wir sind berechtigt, das Theorem I anzuwenden. Die gefundene Lösung y der Gleichung (2) mit den Anfangswerten x_0, y_0 genügt dann auch der Gleichung (1) und ist zugleich die einzige, die in der Umgebung der betrachteten Stelle regulär ist und die vorgeschriebenen Anfangswerte besitzt.

§ 3. Singuläre Lösungen.

664. Der Begriff der singulären Lösung. Das in Nr. 663 bewiesene Existenztheorem hat uns gezeigt, wie wir zu jeder Differentialgleichung erster Ordnung die mit einer willkürlichen Konstanten behaftete *vollständige Lösung* vermöge einer konvergenten Potenz-Reihenentwickelung bestimmen können. Aus ihr finden wir durch Spezialisierung der

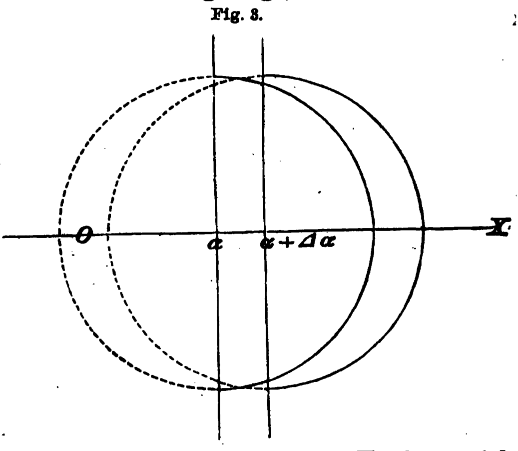


Fig. 3.

Konstanten beliebig viele partikulare Lösungen. Es fragt sich

nun, ob bei einer Differentialgleichung erster Ordnung in besonderen Fällen noch andere Lösungen auftreten können, die sich nicht durch spezielle Wahl der Integrationskonstanten aus der vollständigen ableiten lassen.

Daſs solche Lösungen thatsächlich vorkommen können, möge zunächst durch ein einfaches Beispiel erläutert werden. In Nr. 211 betrachteten wir die Schar aller Kreise mit festem Radius a, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt:

$$y^2 + (x - C)^2 - a^2 = 0.$$

Betrachten wir diese als vollständige Integralgleichung zu einer Differentialgleichung erster Ordnung mit der Integrationskonstanten C, so ergiebt sich durch Differentiation nach x und Elimination von C nach der in Nr. 59 auseinandergesetzten Methode:

$$yy' + (x - C) = 0$$

und daher die Differentialgleichung:

$$y^2 y'^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Diese hat aber offenbar noch die beiden Lösungen:

$$y = + a, \quad y = - a,$$

welche die Parallelen zur x-Axe im Abstande a oberhalb und unterhalb derselben darstellen. Diese sind nicht in der Kreisschar enthalten, also keine partikularen, sondern *singuläre Lösungen* (Nr. 658).

Wir werden im folgenden zunächst die Bedingungen untersuchen, unter denen die Differentialgleichung eine singuläre Lösung besitzt. Wir werden sehen, daſs eine solche nur in Ausnahmefällen vorhanden ist.

665. Erledigung des Falles $y' = f(x, y)$. Aus dem Existenztheorem Nr. 660 folgte, daſs eine Differentialgleichung der Form

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

in welcher die analytische Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) als regulär vorausgesetzt wird, eine und *nur* eine analytische Lösung $y = \varphi(x, y_0)$ besitzt, die für $x = x_0$

den Wert y_0 annimmt und in der Umgebung dieser Stelle regulär ist. Die gefundene Lösung gehört zu den partikularen und es folgt, daſs es unter den gemachten Voraussetzungen wenigstens keine *analytische* singuläre Lösung mit den Anfangswerten x_0, y_0 geben kann. Es fragt sich aber, ob nicht etwa eine *nicht* analytische Funktion $\overline{y} = \overline{\varphi}(x)$ mit denselben Anfangswerten die Differentialgleichung ebenfalls befriedigen kann. Diese Frage ist zu *verneinen*, wie der folgende Satz lehrt:

Satz I. An einer Stelle (x_0, y_0), in deren Umgebung $f(x, y)$ regulär ist, besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auſser der analytischen Lösung $y = \varphi(x)$ keine andere, die für $x = x_0$ denselben Anfangswert y_0 annimmt.

Wir nehmen an, es gäbe noch eine stetige, differentierbare Funktion $\overline{y} = \overline{\varphi}(x)$, welche eine Lösung der Differentialgleichung wäre. Alsdann ist

$$\overline{y}' = f(x, \overline{y}). \tag{2}$$

Setzen wir nun zur Vereinfachung $\overline{y} = y + \eta$, so ist η ebenfalls eine stetige und differentierbare Funktion von x, die sich für $x = x_0$ auf Null reduziert und in der Umgebung von x_0 der Differentialgleichung genügt:

$$\eta' = f(x, y + \eta) - f(x, y) = \eta f_1(x). \tag{3}$$

Hier ist aber

$$f_1 = \frac{f(x, y + \eta) - f(x, y)}{\eta} = F(x, y, \eta) = f_1(x)$$

eine analytische Funktion der drei Variabelen x, y, η, die sich für $\eta = 0$ auf den *endlichen* Wert $\frac{\partial f}{\partial y}$ reduziert, also in der Umgebung der Stelle $x_0, y_0, 0$ regulär ist und nach Einsetzung der Funktionen $y(x)$ und $\eta(x)$ gleichfalls eine *stetige* Funktion von x in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ darstellt.

Da nun die stetige Funktion $\eta = \eta(x)$ für $x = x_0$ den Wert 0 annimmt, so können wir das Intervall $(x_0 \ldots x_1)$ stets so klein wählen, daſs nicht nur $f(x, y)$, sondern auch $F(x, y, \eta) = f_1(x)$ für alle Werte x dieses Intervalles und die zugehörigen Werte von y und η noch regulär bleibt, und daſs gleichzeitig für alle Stellen dieses Intervalles

$$|x - x_0| \cdot |f_1(x)| \leq |x_1 - x_0| \cdot |f_1(x)| < \frac{1}{2}$$

wird. Bezeichnen wir nun mit M den absolut gröfsten Wert, den die Funktion $\eta(x)$ in diesem Intervalle $(x_0 \ldots x_1)$ wirklich annimmt, so folgt aus (3) durch Integration zwischen den Grenzen x_0 und $x < x_1$

$$\eta(x) = \int_{x_0}^{x} \eta(x) f_1(x)\, dx$$

und

$$|\eta(x)| < |x - x_0| M \cdot \frac{\frac{1}{2}}{|x - x_0|} = \frac{M}{2}$$

für *alle* Werte x des Intervalles, während doch der gröfste Wert M auch angenommen werden sollte. Es ergiebt sich also ein Widerspruch aus der Annahme $M > 0$, und die Funktion η mufs in dem ganzen Intervall $(x_0 \ldots x_1)$ den Wert Null haben, also $\overline{y} = y$ sein.

Daraus folgt weiter, dafs an keiner Stelle x, y, wo die Funktion $f(x, y)$ regulär ist, eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ existieren kann.

666. Die Diskriminantenkurve. Die Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

können wir an jeder Stelle, wo die Funktion F regulär und die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv F_3(x, y, y')$ von Null verschieden ist, nach Nr. 663 immer auf die eben behandelte Form $y' = f(x, y)$ bringen, und dort existiert dann gleichfalls aufser der in Nr. 663 gefundenen analytischen Lösung keine weitere, auch keine nicht analytische. Soll also eine Differentialgleichung (1) eine *singuläre* Lösung besitzen, für welche die Funktion F gleichwohl nicht aufhört regulär zu sein, so mufs an allen Stellen dieser Lösung aufser der Gleichung (1) noch die folgende Gleichung erfüllt sein

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv F_3(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) definieren aber, wenn man y' als Parameter betrachtet, im allgemeinen eine analytische Beziehung zwischen x und y allein

$$D(x, y) = 0, \tag{3}$$

die durch Elimination von y' gefunden und durch die „Diskriminantenkurve“ dargestellt wird. Nehmen wir nämlich an, dafs die Gleichung (1) in Bezug auf y' algebraisch, also F eine ganze rationale Funktion von y' sei, so gilt das Gleiche auch von F_3, und die Resultante der beiden Funktionen F und F_3 in Bezug auf y', die sich rein algebraisch bilden läfst, wird in der Algebra als die *Diskriminante* der Funktion $F(y')$ bezeichnet. Ist F auch in Bezug auf x und y algebraisch, so ist es auch $\frac{\partial F}{\partial y'}$ und die Diskriminante $D(x, y)$. Wir haben also den Satz gewonnen:

Satz II. Jede singuläre Lösung der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$, für welche die Funktion F nicht aufhört regulär zu sein, ist in der durch Elimination von y' aus $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ entstehenden Diskriminantenkurve $D = 0$ enthalten. Die Diskriminantenkurve einer algebraischen Differentialgleichung ist selbst algebraisch.

Man hat also die singuläre Lösung, sofern F nicht selbst auf ganzen Kurven singulär wird, ausschliefslich zu suchen unter den Teilen der Diskriminantenkurve, kann sie also, falls sie existiert, ohne Integration finden durch blofse Eliminationsprozesse.

So ist in dem Nr. 664 behandelten Beispiele

$$F \equiv y^2(y'^2 + 1) - a^2 = 0$$

und die Diskriminantenkurve

$$D \equiv -4y^2(y^2 - a^2) = 0$$

zerfällt in die Doppelgerade $y^2 = 0$ und in das Geradenpaar $y = \pm a$. Das letztere stellt in der That eine singuläre Lösung unserer Differentialgleichung dar, dagegen genügt die x-Achse $y = 0$ unserer Differentialgleichung nicht.

Die Diskriminantenkurve der Differentialgleichung

$$(y' - a)^2 - (y - b) = 0$$

reduziert sich auf die eine Gerade $y = b$, die, abgesehen von dem besonderen Falle $a = 0$, der vorgelegten Differentialgleichung *nicht* genügt.

Die Diskriminantenkurve (3) braucht also nicht notwendig eine Lösung der Differentialgleichung darzustellen. Die Gleichung (3) als Resultante von (1) und (2) besagt eben nur, dafs die beiden Gleichungen (1) und (2) sich durch denselben Wert von y' befriedigen lassen; dieser Wert braucht aber nicht derselbe zu sein, der die Tangentenrichtung der Diskriminantenkurve bestimmt, also der Gleichung genügt:

(4) $$D_1 + D_2 y' = 0.$$

Der Index soll hier und im folgenden die Nummer des Argumentes bedeuten, nach welchem die partielle Ableitung zu nehmen ist. D_1 bedeutet die partielle Ableitung von $D(x, y)$ nach x, D_2 die nach y. Diese Bedingung (4), die zu (3) hinzukommen mufs, wenn die Diskriminantenkurve ganz oder teilweise eine Lösung der Differentialgleichung sein soll, läfst sich aber auch durch eine andere ersetzen, welche den expliciten Ausdruck der Diskriminante D, also die wirkliche Ausführung der Elimination von y' nicht erfordert. Soll nämlich die Differentialgleichung (1) längs der Diskriminantenkurve erfüllt sein, so kann man die Gleichung (1) total nach x differentiieren und erhält dann mit Rücksicht auf (2) die Gleichung

(5) $$F_1 + F_2 y' = 0,$$

welche die Tangentenrichtung der durch (1) und (2) gegebenen Diskriminantenkurve bestimmt, vorausgesetzt, dafs F_1 und F_2 nicht auf der ganzen Kurve gleichzeitig verschwinden. Giebt es aber ein Kurvenstück, das den Gleichungen (1), (2) und (5) gleichzeitig genügt für dieselben Werte von x, y und y', ohne dafs F_1 und F_2 überall gleichzeitig verschwinden, so ist es in der That auch eine Lösung unserer Differentialgleichung. Als Bedingungen für die Existenz einer singulären Lösung erhalten wir also die 3 Gleichungen:

(6) $$F = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_1 + F_2 y' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen würden wir durch Elimination von y' zu den Gleichungen (3) und (4) gelangen, durch Elimination von y' und y aber zu einer Gleichung in x allein, die dann für variabele Werte von x, d. h. identisch bestehen

mufs, wenn unsere Differentialgleichung eine singuläre Lösung besitzen soll. Die drei Gleichungen (6), welche im allgemeinen die drei Unbekannten x, y, y' bestimmen, müssen also in diesem Falle statt einer endlichen oder diskreten Reihe vielmehr eine *kontinuierliche Folge* von gemeinsamen Lösungssystemen besitzen.

667. Geometrische Deutung. In Nr. 659 hatten wir ausgeführt, dafs durch eine Differentialgleichung erster Ordnung aus der Gesamtheit aller ∞^3 Linienelemente (x, y, y') der Ebene eine zweifache Mannigfaltigkeit herausgegriffen wird. Ist unsere Differentialgleichung von der Form

$$y' = f(x, y),$$

wo $f(x, y)$ in einem gewissen Bereiche als eindeutige analytische Funktion der beiden Veränderlichen erklärt ist, so gehört zu jedem Punkte x, y dieses Bereiches ein einziger Wert y', also ein einziges Linienelement von bestimmter Richtung. Demnach geht durch jeden Punkt auch nur eine einzige Integralkurve unserer Differentialgleichung, deren Tangente mit dem Linienelemente zusammenfällt; und alle diese Integralkurven bedecken das Flächenstück einfach. Ist aber die Funktion $f(x, y)$ mehrdeutig, so gehen durch jeden Punkt mehrere Linienelemente der Differentialgleichung, also auch mehrere Integralkurven, die den betreffenden Teil der Ebene mehrfach überdecken. Ist also die linke Seite unserer Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von y', so gehören zu jedem Punkte x, y höchstens n verschiedene Linienelemente, die zum Teil reell, zum Teil konjugiert komplex sein können, und die Anzahl $m \leqq n$ der reellen Integralkurven durch einen Punkt kann in den verschiedenen Teilen der Ebene eine verschiedene sein. Bei der stetigen Veränderung von x, y kann sich aber diese Anzahl m nur an solchen Stellen um eine gerade Zahl ändern, wo der imaginäre Bestandteil zweier konjugiert komplexen Wurzeln y' gerade verschwindet, die beiden Wurzeln also zusammenfallen. An diesen Stellen mufs nun aufser der Funktion F auch ihre partielle Ableitung

$\frac{\partial F}{\partial y'}$ und damit auch die Diskriminante $D(x, y)$ verschwinden; d. h.: *„Doppelelemente" können sich nur auf der Diskriminantenkurve befinden.* Damit haben wir den Satz gewonnen:

Satz III. Der Diskriminantenkurve gehört an der geometrische Ort aller „Doppelelemente" der Differentialgleichung, d. h. aller Punkte, in welchen zwei oder mehrere Linienelemente der Differentialgleichung zusammenfallen. Zwei Gebiete der Ebene, in denen die Anzahl der reellen Integralkurven durch einen Punkt eine verschiedene ist, werden notwendig durch die Diskriminantenkurve getrennt.

Nur wenn die Doppelelemente mit den Tangenten der Diskriminantenkurve zusammenfallen, wird der betreffende Teil der Diskriminantenkurve eine Lösung, und zwar im allgemeinen eine singuläre Lösung der Differentialgleichung darstellen. Dies ist die geometrische Bedeutung der Formel (5) in der vorigen Nummer.

668. Beziehung zum allgemeinen Integral. Da für die Doppelelemente der Differentialgleichung (1), $F = 0$, nach Nr. 666 die Ableitung $F_3 = \frac{\partial F}{\partial y'}$, immer verschwindet, so ist das Existenztheorem Nr. 663 auf sie natürlich nicht anwendbar. Trotzdem können wir voraussetzen, daſs jedes Doppelelement mindestens einer Integralkurve angehöre. Auf beiden Seiten der Diskriminantenkurve ist nämlich F_3 wieder von 0 verschieden, und es existieren daher in beliebiger Nähe Integralkurven mit Linienelementen, die von den betrachteten Doppelelementen beliebig wenig verschieden sind und daher als ihre Fortsetzungen betrachtet werden können. Diese Integralkurven können allerdings auch *imaginär* sein, z. B. bei der Differentialgleichung

$$(y' - a)^2 + y^2 = 0,$$

welche zwar eine reelle Diskriminantenkurve $y = 0$, aber keine einzige reelle Integralkurve besitzt. Nehmen wir aber die Integralkurven wenigstens auf der einen Seite der Diskriminantenkurve als reell an, so können sie auf ihr, wie wir nachher sehen werden, Spitzen oder sonst ausgezeichnete Punkte besitzen, die nach Nr. 663 für $F_3 \neq 0$ nicht möglich sind. In

dem besonderen Falle aber, wo die Diskriminantenkurve selbst eine Lösung der Differentialgleichung ist, und wenn die Doppelelemente mit ihren Tangenten zusammenfallen, werden auch die betrachteten Integralkurven die Diskriminantenkurve sämtlich *berühren* und die singuläre Lösung wird eine *Einhüllende* oder *Enveloppe* (vergl. Nr. 210—212) der Integralkurven darstellen. Und umgekehrt, wenn die Integralkurven eine Einhüllende besitzen, ohne auf ihr singuläre Punkte zu haben, so werden sie nach Nr. 212 diese Einhüllende sämtlich berühren, und die Linienelemente dieser Kurve werden als Linienelemente von Integralkurven die Differentialgleichung $F=0$ gleichfalls befriedigen. Dann ist also die Einhüllende in der That auch eine Lösung der Differentialgleichung. Wir haben also den Satz gewonnen:

Satz IV. Die singulären Lösungen einer Differentialgleichung hat man unter den Einhüllenden ihrer ∞^1 *partikularen Integralkurven zu suchen.*

Ist also

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

das vollständige Integral unserer Differentialgleichung, so finden wir seine Einhüllende nach Nr. 210, indem wir die Gleichung hinzufügen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \tag{3}$$

und C aus den beiden Gleichungen (2) und (3) eliminieren. Diese Einhüllende ist dann auch wirklich eine Lösung, und zwar im allgemeinen eine singuläre Lösung der Differentialgleichung, sofern auf ihr nicht beständig $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden (Nr. 212). So stellen in dem in Nr. 664 gegebenen Beispiele die beiden Geraden $y = \pm a$ die Einhüllenden der Kreisschar

$$y^2 + (x - C)^2 = a^2$$

und gleichzeitig auch die singuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 y'^2 + y^2 - a^2 = 0$$

dar.

Formell lassen sich die partikularen und die hier behandelten singulären Lösungen unter dem Gesichtspunkte zusammenfassen, dafs beide Mal die Differentialgleichung (1) das Eliminationsresultat von C aus den Gleichungen Φ und $d\Phi = 0$ darstellt. Bei den partikularen Lösungen betrachtet man C als Konstante und setzt daher $d\Phi$ direkt gleich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy.$$

Bei den singulären Lösungen betrachtet man C als Funktion von x, so dafs

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial C} dC$$

wird. Aber auch jetzt wird die Differentialgleichung das Resultat der Elimination von C aus

$$\Phi = 0$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$$

darstellen, wenn man C so bestimmt, dafs der Koeffizient $\frac{\partial \Phi}{\partial C}$ von dC in $d\Phi$ verschwindet. Man nennt daher das hier auseinandergesetzte Verfahren zur Gewinnung neuer Integrale die *Variation der Konstanten.* Wir werden dieser Methode später noch öfter wieder begegnen, so namentlich in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

669. Die Diskriminantenkurve als Ort der Spitzen. Es sei die Differentialgleichung:

$$y - 2xy' - y'^2 = 0$$

gegeben, welche man durch Elimination von C zwischen der Gleichung

$$\Phi(x, y, C) = (3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0$$

und der durch Differentiation nach x und y daraus abgeleiteten Gleichung erhält. Hier wird:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 2(3xy + 2x^3 + C)$$

und die Elimination von C zwischen

$$\Phi = 0 \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

giebt

$$(y + x^2)^5 = 0$$

oder

$$y = -x^2.$$

Dies ist zugleich die Gleichung der Diskriminantenkurve, wie man nach dem in Nr. 666 gelehrten Verfahren unmittelbar sieht. Es ist aber $y = -x^2$ keine Lösung der Differentialgleichung; vielmehr erkennt man, daſs die beiden Ableitungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(3xy + 2x^3 + C)(3y + 6x^2) - 12(y + x^2)^2 2x,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(3xy + 2x^3 + C)3x - 12(y + x^2)^2$$

beide zugleich null werden, wenn man

$$\Phi = 0 \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

setzt. Die Kurve

$$y = -x^2$$

ist Ort der Spitzen der Integralkurven.

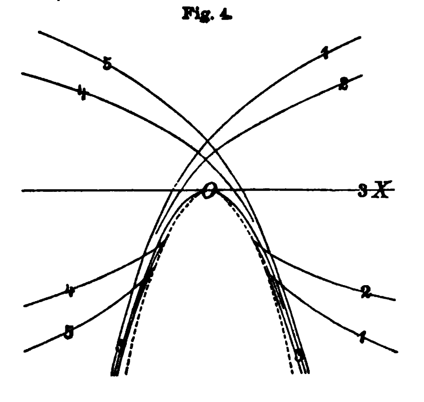


Fig. 4.

In Fig. 4 ist die Kurvenschar

$$\Phi = 0$$

durch fünf ihrer Kurven angedeutet, die der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5 numeriert sind. Die Kurve

$$y = -x^2$$

ist punktiert.

670. Gleichzeitig singuläre und partikulare Lösungen. Schlieſslich haben wir noch auf einen wichtigen Umstand hinzuweisen. Das singuläre Integral stellt die Einhüllende oder, anders gesagt, den Ort der Durchschnittspunkte aufeinander folgender Kurven des vollständigen Integralsystemes dar. Es kann nun eintreten, daſs die Einhüllende oder auch nur eine der Kurven, aus denen sie sich zusammensetzt, selbst einen

Teil des Systemes der Eingehüllten bildet. Man hat dann den bemerkenswerten Fall einer Lösung, welche den doppelten Charakter eines singulären und eines partikularen Integrales besitzt. Es wird nützlich sein, hiervon ein Beispiel zu geben. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung:

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

ist:

$$y = C(x - C)^2.$$

Die Differentiation der Integralgleichung nach C liefert:

$$(x - C)(x - 3C) = 0.$$

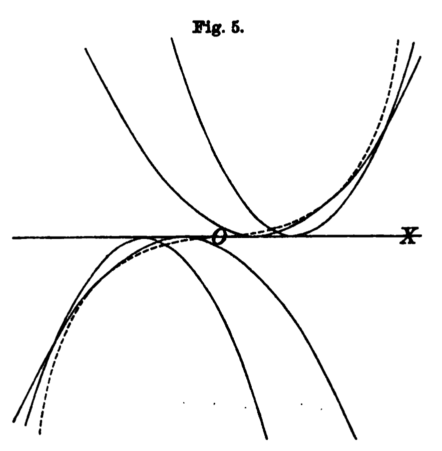
Die Einhüllende setzt sich also aus zwei Kurven zusammen, deren Gleichungen erhalten werden, indem man C durch x, und durch $\frac{x}{3}$ in der Gleichung des Systemes ersetzt.

Es folgt so:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = \frac{4x^3}{27}.$$

Die Lösung $y = 0$ ist zugleich ein besonderer Fall der Systemkurven, sie entspricht dem Werte $C = 0$.

Fig. 5.



In beistehender Fig. 5 sind vier Parabeln der Schar sowie die x-Achse gezeichnet. Die einhüllende kubische Parabel ist punktiert.

Nur bei einem Kurvensysteme, welches die Konstande C mindestens in der dritten Potenz enthält, welches also die Ebene mindestens dreifach überdeckt, kann dieser Fall eintreten. Die Einhüllende bildet den Ort der Punkte, in denen mindestens drei Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen, und die Tangente der Ortskurve ist in jedem Punkte mit dieser Richtung identisch.

Zweites Kapitel.

Integrationsmethoden bei Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 1. Grundbegriffe.

671. Trennung der Variabelen. Nachdem wir die allgemeinen Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt haben, müssen wir nun die Fälle untersuchen, bei denen man die Integrale in geschlossener Form ermitteln, d.h. entweder durch explicite oder implicite elementare Funktionen, oder mit Hilfe bestimmter Integrale darstellen kann; durch diese letzteren werden, wie wir gesehen haben, im allgemeinen neue transscendente Funktionen, wie z. B. die elliptischen, definiert. Eine Differentialgleichung wird also als gelöst betrachtet, wenn es gelungen ist, die allgemeine Funktionalgleichung zwischen den Variabelen zu bilden, welche die Ableitung derselben nicht mehr enthält, mögen auch in dieser Gleichung neue Funktionen, insbesondere Quadraturen auftreten, deren Untersuchung freilich weitere Aufgaben darbietet. In dem vorliegenden Kapitel behandeln wir nur die Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

Der einfachste Fall ist hier derjenige, bei welchem die Variabelen getrennt sind; dann hängt die Integration der Gleichung nur von Quadraturen ab. Wir sagen, dafs die Variabelen in einer Differentialgleichung getrennt sind, wenn dieselbe auf die Form gebracht ist:

$$X + Y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

oder

$$X dx + Y dy = 0,$$

wobei X eine integrierbare Funktion von x, und ebenso Y eine Funktion von y ist. Bezeichnet man mit x_0 und y_0 irgend

welche bestimmte Größen, mit C eine willkürliche Konstante, so ist das vollständige Integral der Gleichung (1):

$$\int_{x_0}^{x} X dx + \int_{y_0}^{y} Y dy = C. \tag{2}$$

Statt dieses Integrales kann man auch schreiben:

$$\int_{x_0}^{x} X dx + \int_{y_0}^{y} Y dy = 0, \tag{3}$$

wenn x_0 irgend einen bestimmten Wert und y_0 eine willkürliche Konstante bezeichnen; diese Konstante ist dann gerade der Wert, welchen y annimmt, falls man der Variabelen x den Wert x_0 beilegt.

Daſs in der That diese Funktion zwischen x und y den Forderungen genügt, ist leicht einzusehen, indem man die gewonnene Gleichung differentiiert, und daſs auch nur die Funktion y, welche aus der Gleichung (3) hervorgeht, wenn man sich dieselbe nach y aufgelöst denkt, die Differentialgleichung befriedigt und für $x = x_0$ gleich y_0 wird, folgt, nach dem allgemeinen Lehrsatze in Nr. 660 aus der Eindeutigkeit des Integrales, solange X und Y regulär sind und Y nicht verschwindet.

Das Problem der Integration einer Differentialgleichung ist demnach als gelöst zu betrachten, sobald die Variabelen getrennt sind; diese Trennung läſst sich bisweilen vermittelst einer Transformation der Variabelen vollziehen, wie wir an Beispielen in diesem Kapitel sehen werden.

672. Beispiele: 1. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1-y^2}{1-x^2} = 0$$

oder

$$\frac{dx}{1-x^2} + \frac{dy}{1-y^2} = 0$$

hat das Integral:

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = C.$$

Nun ist

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x} = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

und ebenso:

$$\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = l\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Schreibt man also $l\sqrt{C}$ an Stelle von C, so wird das obige Integral gleich:

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = C.$$

Für $C = 0$ erhält man die partikularen Lösungen

$$x = -1, \quad y = -1;$$

für $C = \infty$ die beiden anderen partikularen Lösungen

$$x = +1, \quad y = +1.$$

2. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

oder

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

hat das vollständige Integral:

$$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\sin y = \operatorname{arc}\sin C,$$

wobei C die willkürliche Konstante bedeutet. Bildet man den Sinus der auf beiden Seiten stehenden Glieder, so folgt:

$$x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} = C;$$

auch hier wird die Differentialgleichung befriedigt, indem man $x = \pm 1$ oder $y = \pm 1$ setzt; aber diese Lösungen sind jetzt singuläre und nicht partikulare; denn sie ergeben sich nicht aus der vollständigen Integralgleichung durch einen besonderen Wert der Konstanten. Man vergleiche zu diesem Beispiele die Nr. 685.

673. Die homogene Differentialgleichung. Wenn sich bei einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die rechte Seite als eine Funktion des Quotienten $\frac{y}{x}$ darstellen läſst, also

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

wird, so kann man vermittelst der Substitution:

$$\frac{y}{x} = z \quad \text{oder} \quad y = xz, \tag{2}$$

wobei z als neue Variabele an Stelle von y eingeführt wird, die Variabelen trennen. Denn man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z, \tag{3}$$

also an Stelle der Gleichung (1):

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z) \tag{4}$$

oder

$$\frac{dz}{f(z) - z} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Bezeichnet man mit C die willkürliche Konstante, so folgt durch Integration:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = C \tag{5}$$

oder

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - l\,\frac{x}{x_0} = C.$$

Die Werte x_0 und z_0 können beliebig fixiert werden; betrachtet man aber z_0 als die willkürliche Konstante, so kann man einfacher schreiben:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - l\,\frac{x}{x_0} = 0.$$

Wenn in der Differentialgleichung:

$$Mdx + Ndy = 0$$

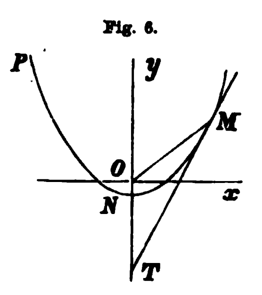
oder

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

M und N *homogene Funktionen* derselben Ordnung von x und y bezeichnen, so gehört sie zu der betrachteten Art; denn der Quotient $\frac{M}{N}$ ist alsdann eine homogene Funktion nullter Ordnung von x und y, also in der Form $-f\left(\frac{y}{x}\right)$ darstellbar.

674. Ein Beispiel. *Es seien die beiden rechtwinkligen Achsen Ox und Oy gegeben; man soll eine Kurve MNP bestimmen, so dafs der Radiusvektor OM stets gleich ist der Entfernung OT zwischen dem Koordinatenanfangspunkte und dem Schnittpunkte, den die Tangente des Punktes M mit der Ordinatenachse bildet.*

Fig. 6.



Die Gleichung der Tangente MT im Punkte $M(x, y)$ ist:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

und setzt man $X = 0$, $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, so erhält man die Differentialgleichung der gesuchten Kurve, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \mp \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Wir setzen

$$y = xz, \; \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

alsdann wird diese Gleichung:

$$x\frac{dz}{dx} + z = z \mp \sqrt{1 + z^2}$$

oder:

$$\frac{dz}{\mp\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Hier sind die Variabelen getrennt, und da

$$\int \frac{dx}{x} = l\,x + \text{const}, \; \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = l(z + \sqrt{1 + z^2}) + \text{const}$$

ist, so wird die Integralgleichung:

$$l(z \mp \sqrt{1 + z^2}) = lx - lC,$$

wobei lC die willkürliche Konstante bedeutet. Sie läfst sich auch schreiben:

$$z \mp \sqrt{1 + z^2} = \frac{x}{C},$$

und liefert also die beiden Funktionen:

$$z - \sqrt{1 + z^2} = \frac{x}{C}$$

oder:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \frac{x}{C}.$$

Man vereinigt diese zu dem einen Ausdruck:

$$\left(z - \sqrt{1 + z^2} - \frac{x}{C}\right)\left(z + \sqrt{1 + z^2} - \frac{x}{C}\right) = 0$$

oder:

$$\left(z - \frac{x}{C}\right)^2 - (1 + z^2) = 0,$$

also

$$\frac{-2zx}{C} + \frac{x^2}{C^2} - 1 = 0.$$

Setzt man wieder $\frac{y}{x}$ an Stelle von z, so folgt:

$$x^2 - C^2 - 2Cy = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Parabeln dar, deren Brennpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist, und deren Achse mit der y-Achse zusammenfällt. Durch Differentiation nach C folgt:

$$2C(C + y) = 0.$$

$C = 0$ liefert die partikulare Lösung $x^2 = 0$, also die y-Achse; $C = -y$ giebt das singuläre Integral

$$x^2 + y^2 = 0,$$

welche ein imaginäres Geradenpaar — die sogenannten Minimalgeraden — darstellt; in der That wird die Differentialgleichung befriedigt, indem man $y = \pm xi$ setzt, wo i die Wurzel aus -1 bedeutet.

675. Die lineare Differentialgleichung. Eine Differentialgleichung erster Ordnung heifst *linear*, wenn in ihr die eine Variabele und ihre Ableitung nur in erster Potenz und nicht miteinander multipliziert vorkommen. Solch eine Gleichung ist also von der Form

$$\frac{dy}{dx} + X_0 y + X_1 = 0, \tag{1}$$

wobei X_0 und X_1 gegebene Funktionen der unabhängigen Variabelen x sind. Wir fragen zunächst, wie man die vollständige Lösung von (1) aus der partikularen findet. Sind y_1 und y_2 zwei partikulare Lösungen, y die vollständige Lösung von (1), so folgt durch Subtraktion:

$$\frac{d(y-y_1)}{dx} + X_0 \cdot (y - y_1) = 0$$

$$\frac{d(y-y_2)}{dx} + X_0 \cdot (y - y_2) = 0$$

und daher:

$$\frac{d\,l(y-y_1)}{dx} = \frac{d\,l(y-y_2)}{dx}$$

oder:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = C, \tag{1a}$$

wo C die Integrationskonstante ist. Die Gleichung (1) läfst sich aber auch direkt leicht integrieren, indem man eine Trennung der Variabelen herbeiführt. Zu dem Zwecke setzt man:

$$y = \theta z, \tag{2}$$

wobei z eine neue Variabele und θ eine Funktion von x ist, die noch willkürlich bestimmt werden kann. Es wird:

$$\frac{dy}{dx} = \theta \frac{dz}{dx} + z \frac{d\theta}{dx}, \tag{3}$$

und die Gleichung (1) erhält die Form:

$$\theta \frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\theta}{dx} + X_0 \theta\right) + X_1 = 0. \tag{4}$$

Nun läfst sich die Funktion θ durch die Bedingung bestimmen, dafs:

$$\frac{d\theta}{dx} + X_0 \theta = 0 \tag{5}$$

wird, überdies können wir festsetzen, dafs θ gleich 1 wird für $x = x_0$. In der Differentialgleichung (5) sind die Variabelen getrennt, wenn man sie in der Form schreibt:

$$\frac{d\theta}{\theta} + X_0 dx = 0;$$

hieraus folgt:

$$(6) \qquad l\theta = -\int_{x_0}^{x} X_0 dx, \quad \theta = e^{-\int_{x_0}^{x} X_0 dx}.$$

Ferner reduziert sich nun die Gleichung (4) auf die Form:

$$\theta \frac{dz}{dx} + X_1 = 0$$

oder:

$$dz + \frac{X_1 dx}{\theta} = 0.$$

Die Variabelen sind hier getrennt, und die Integration ergiebt:

$$z = -\int_{x_0}^{x} \frac{X_1 dx}{\theta} + C,$$

wobei C die willkürliche Konstante ist. Demnach wird die vollständige Lösung der Gleichung (1):

$$(7) \qquad y = e^{-\int_{x_0}^{x} X_0 dx} \left[C - \int_{x_0}^{x} X_1 e^{\int_{x_0}^{x} X_0 dx} dx \right].$$

676. Beispiel I. *Die Differentialgleichung*

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = a$$

zu integrieren, wo a eine gegebene Konstante ist.

Hier ist:

$$X_0 = -\frac{x}{1+x^2}, \quad X_1 = -\frac{a}{1+x^2},$$

also:

$$-\int_{0}^{x} X_0 dx = l\sqrt{1 + x^2}, \quad \theta = \sqrt{1 + x^2};$$

ferner:

$$\int \frac{X_1}{\theta} dx = -a \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} + \text{const.};$$

also ist die gesuchte Lösung:

$$y = ax + C\sqrt{1 + x^2},$$

wobei C die willkürliche Konstante bedeutet.

677. Beispiel II. *Die Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$$

zu integrieren.

Hier ist:

$$X_0 = \frac{2}{x}, \quad X_1 = -\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx,$$

ferner:

$$\int_1^x X_0 dx = 2lx, \quad \theta = \frac{1}{x^2},$$

folglich:

$$\int \frac{X_1}{\theta} dx = \int x^2 X_1 dx = \frac{x^3}{3} X_1 - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{dX_1}{dx} dx.$$

Nun ist:

$$\int x^3 \frac{dX_1}{dx} dx = -\int x^2 \sin x \, dx = (x^2 - 2)\cos x - 2x \sin x + \text{const.},$$

also:

$$\int \frac{X_1}{\theta} dx = -\frac{x^3}{3}\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx - \frac{1}{3}(x^2 - 2)\cos x + \frac{2}{3} x \sin x + \text{const.},$$

mithin ist die gesuchte Lösung:

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3}\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx + \frac{x^2 - 2}{3x^2}\cos x - \frac{2}{3}\frac{\sin x}{x}.$$

678. Differentialgleichungen, die auf lineare zurückführbar sind. Die Gleichungen von der Form:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0, \tag{1}$$

in welchen X und X_1 gegebene Funktionen von x bezeichnen, lassen sich auf die lineare Form bringen vermittelst der Substitution:

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z, \quad y^{-n}\frac{dy}{dz} = 1.$$

Denn dividiert man die ursprüngliche Gleichung mit y^n, so wird sie:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Xy^{1-n} + X_1 = 0,$$

und folglich ergiebt die Substitution:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Xz + X_1 = 0.$$

Auch kann man direkt auf die Gleichung (1) das Integrationsverfahren anwenden, das wir in Nr. 675 benutzten. Denn setzt man:

$$y = \theta z,\ \frac{dy}{dx} = \theta\frac{dz}{dx} + z\frac{d\theta}{dx},$$

so wird die Gleichung:

$$\theta\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\theta}{dx} + \theta X\right) + X_1\theta^n z^n = 0. \tag{2}$$

Dieselbe reduziert sich auf die Form:

$$\frac{dz}{dx} + X_1\theta^{n-1}z^n = 0, \tag{3}$$

wenn man θ so bestimmt, daſs

$$\frac{d\theta}{dx} + \theta X = 0 \tag{4}$$

wird. Diese Gleichung ergiebt wie früher:

$$\theta = e^{-\int_{x_0}^{x} X dx}.$$

Die Gleichung (3) wird, wenn man die Variabelen trennt:

$$\frac{dz}{z^n} + X_1\theta^{n-1}dx = 0.$$

Integriert man diese und bezeichnet man mit C die Konstante, so folgt:

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = -\int_{x_0}^{x} X_1\theta^{n-1}dx + C.$$

Also ist die Integralgleichung von (1):

$$y^{1-n} = (1-n)e^{-(1-n)\int_{x_0}^{x} X dx}\left[C - \int_{x_0} e^{(1-n)\int_{x_0}^{x} X dx} X_1 dx\right].$$

Zusatz. Auf die lineare Gleichung läfst sich nun auch die Gleichung

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy + \chi(x, y)\,(x\,dy - y\,dx) = 0$$

zurückführen, in welcher φ und ψ homogene Funktionen vom Grade n und χ eine homogene Funktion vom Grade q ist. Denn setzt man:

$$\frac{y}{x} = t, \quad x\,dy - y\,dx = x^2\,dt,$$

so wird die Gleichung:

$$x^n \Phi\,dx + x^n \Psi(x\,dt + t\,dx) + x^{q+2} X\,dt = 0$$

oder

$$(\Phi + t\Psi)\frac{dx}{dt} + x\Psi + x^{q-n+2} X = 0,$$

so dafs man die soeben gelöste Gleichung erhält. Ist $q = n - 2$, so ist diese Gleichung eine lineare.

679. Die Trajektorien. Das allgemeine Problem dieser Art ist das folgende:

Ein System von Kurven ist gegeben, dargestellt durch eine Gleichung, in welcher ein variabeler Parameter enthalten ist; es sollen die Kurven bestimmt werden, welche die gegebenen unter einem bestimmten Winkel schneiden.

Ist der vorgeschriebene Winkel ein rechter, so heifsen die gesuchten Kurven die *orthogonalen Trajektorien* des Systemes.

Die Aufgabe führt immer auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. Die gegebenen Kurven seien auf zwei rechtwinklige Achsen bezogen, und ihre Gleichung sei durch

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

dargestellt, wobei α den variabelen Parameter bezeichnet; ist $M(x, y)$ ein Durchschnittspunkt zwischen einer Kurve des Systemes und einer Trajektorie, bezeichnen wir ferner mit c, c_1 die Richtungskoeffizienten der beiden Tangenten im Punkte M, mit V die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels zwischen den beiden Kurven, so ist:

$$\frac{c_1 - c}{1 + c c_1} = V.$$

Der Koeffizient c ist der Wert von $\frac{dy}{dx}$, welcher aus der Gleichung (1) folgt, d. h. es ist:

$$c = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

da ferner c_1 der Wert von $\frac{dy}{dx}$ für die gesuchte Kurve ist, so wird:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx}} = V$$

oder

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + V\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} - V\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0. \tag{2}$$

Eliminiert man α zwischen den Gleichungen (1) und (2), so erhält man eine Gleichung:

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3}$$

welche die Differentialgleichung der gesuchten Trajektorien ist.

In Bezug auf die Eindeutigkeit des Winkels, dessen trigonometrische Tangente den gegebenen Wert V hat, ist noch folgendes zu bemerken: Hat man als positiven Drehungssinn die Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse festgesetzt, so bedeutet c die trigonometrische Tangente des Winkels, um welchen man im positiven Sinne die Abscisse zu drehen hat, damit sie in die Lage der Tangente kommt; ferner ist V die trigonometrische Tangente des Winkels, um welchen man diese Tangente in demselben Sinne weiter zu bewegen hat, damit sie in die Tangente der gesuchten Trajektorie übergeht.

Bei rechtwinkligen Trajektorien ist $V = \infty$; die Gleichung (2) reduziert sich daher auf:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{4}$$

und die Elimination von α zwischen den Gleichungen (1) und (4) liefert die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien.

680. Erstes Beispiel. *Die Kurven zu bestimmen, welche das System $y = \alpha x^m$ unter einem konstanten gegebenen Winkel schneiden.*

Der Wert von $\frac{dy}{dx}$ wird hier gleich $\alpha m x^{m-1}$; bezeichnet man also mit $\frac{1}{k}$ die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels, so ist die Differentialgleichung der gesuchten Trajektorien:

$$\frac{\frac{dy}{dx} - m\frac{y}{x}}{1 + m\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{k}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\frac{y}{x} + \frac{1}{k}}{1 - \frac{m}{k}\frac{y}{x}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von $\frac{y}{x}$, also läſst sich die Integration nach der Methode der Nr. 673 ausführen.

Wir untersuchen nun den Fall $m = 1$; die gegebenen Kurven bilden alsdann ein System von Geraden, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen; die Differentialgleichung wird

$$x dx + y dy = k(x dy - y dx).$$

Man erkennt unmittelbar, daſs $x dy - y dx$ das Differential des doppelten Sektors ist, welcher von dem Radiusvektor des Punktes x, y mit einem festen Radius gebildet wird, und welcher im Polarkoordinatensysteme durch $\varrho^2 d\omega$ ausgedrückt wird. Desgleichen ist $x dx + y dy$ das halbe Differential $\varrho d\varrho$ des Quadrates ϱ; also wird:

$$\varrho d\varrho = k\varrho^2 d\omega$$

oder

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = k d\omega.$$

Demnach ergiebt die Integration:

$$\varrho = Ce^{k\omega}.$$

Die gesuchten Trajektorien sind logarithmische Spiralen, was mit einer bekannten Eigenschaft dieser Kurven überein stimmt (Nr. 247).

681. Zweites Beispiel. *Die orthogonalen Trajektorien eines Systemes von konfokalen Ellipsen zu bestimmen.*

Die Gleichung der gegebenen Ellipsen ist

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = 1,$$

wobei ϱ den variabelen Parameter und b eine feste Größe bezeichnet; für die Ellipsen ist $\varrho^2 > b^2$. Die Differentiation ergiebt:

$$\frac{x\,dx}{\varrho^2} = \frac{y\,dy}{b^2 - \varrho^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{b^2},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} = \frac{x}{dx}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{b^2}, \quad \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = -\frac{y}{dy}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{b^2},$$

also durch Addition:

$$\frac{(x\,dy - y\,dx)(x\,dx + y\,dy)}{b^2\,dx\,dy} = 1.$$

Diese Differentialgleichung gehört den gegebenen Ellipsen an. Um hieraus die der orthogonalen Trajektorien zu gewinnen, hat man $\frac{dy}{dx}$ durch $-\frac{dx}{dy}$ oder dy durch $-dx$, dx durch dy zu ersetzen; bei dieser Vertauschung bleibt aber die vorstehende Gleichung ungeändert; also bleibt auch das Integral das nämliche, d. h. die Gleichung der gegebenen Ellipsen stellt zugleich das System der gesuchten Trajektorien dar. Nur um die beiden Systeme zu unterscheiden, die algebraisch irreducibel sind, kann man ϱ^2 durch einen anderen Parameter μ^2 ersetzen, also die Gleichung schreiben:

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} = 1.$$

Nimmt man $\mu^2 < b^2$ an, so stellt diese Gleichung Hyperbeln dar, deren Brennpunkte mit denen der Ellipsen zusammenfallen, und welche diese unter rechten Winkeln schneiden.

682. Drittes Beispiel. *Die rechtwinkligen Trajektorien aller gleichseitigen Hyperbeln zu bestimmen, deren Mittelpunkt ein gegebener Punkt ist, und die durch einen zweiten gegebenen Punkt gehen.*

Im Polarkoordinatensystem haben die gegebenen Hyperbeln die Gleichung:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 \cos 2\alpha}{\cos(2\omega - 2\alpha)}$$

oder

$$\operatorname{cotg}(2\omega - 2\alpha) = \frac{a^2 \sin 2\omega}{\varrho^2 - a^2 \cos 2\omega};$$

α ist hier der variabele Parameter, und a bedeutet die Entfernung des Mittelpunktes vom gegebenen Punkte auf der Achse. Die logarithmische Differentiation ergiebt:

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \operatorname{tang}(2\omega - 2\alpha)$$

oder

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \frac{\varrho^2 - a^2 \cos 2\omega}{a^2 \sin 2\omega}.$$

Nun ist $\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega}$ die Tangente des Winkels zwischen der Normalen und dem Radiusvektor; folglich erhält man die Differentialgleichung der gesuchten Kurven, wenn man für $\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega}$ den reziproken, negativen Wert einsetzt, also:

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \frac{a^2 \sin 2\omega}{a^2 \cos 2\omega - \varrho^2}$$

oder

$$\frac{d(a^2 \cos 2\omega)}{d\varrho} = -\frac{2}{\varrho}(a^2 \cos 2\omega) + 2\varrho.$$

Diese Gleichung ist eine lineare, wenn man $a^2 \cos 2\omega$ und ϱ als die Variabelen betrachtet; bezeichnet man mit $a^4 - b^4$ die willkürliche Konstante, so erhält man das Integral:

$$a^2 \cos 2\omega = \frac{1}{2\varrho^2}[\varrho^4 + a^4 - b^4]$$

oder

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\omega + a^4 = b^4.$$

Diese Gleichung, in welcher b der variabele Parameter ist, stellt ein System von Cassinischen Kurven mit den nämlichen Brennpunkten dar (Nr. 561).

§ 2. Die Additionstheoreme.

683. Der Logarithmus. Die wesentlichen Eigenschaften der Logarithmen und der cyklometrischen Funktionen lassen sich leicht vermittelst der Integralrechnung erkennen; wäre die

Theorie dieser Transscendenten nicht schon früher entwickelt worden, so hätte man sicherlich ihre Grundlagen aus den ersten Sätzen in der Theorie der Differentialgleichungen gewonnen, wie solches bei den elliptischen Funktionen und den höheren Transscendenten mit algebraischen Differentialen in der That geschehen ist. Auf einige Entwickelungen dieser Art wollen wir hier eingehen.

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0. \tag{1}$$

Die Variabelen sind hier getrennt, aber die Integration jedes Gliedes erfordert den Begriff des Logarithmus. Wenn diese Funktion noch nicht eingeführt ist, so mufs man das Integral durch die Gleichung

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C$$

darstellen. Soll sich der Wert von y für $x = 1$ auf eine bestimmte Gröfse z reduzieren, so mufs man die Konstante C durch die Bedingung bestimmen:

$$\int_1^z \frac{dy}{y} = C$$

oder

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = C,$$

indem man die Variabele unter dem Integralzeichen ebenfalls mit z bezeichnet; unser Integral wird demnach:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^z \frac{dz}{z}. \tag{2}$$

Andererseits ist evident, dafs die Gleichung (1) ein algebraisches Integral zuläfst; denn wenn man die Nenner beseitigt, so folgt:

$$ydx + xdy = 0$$

oder

$$d(xy) = 0,$$

also ist das Integral:

$$xy = \text{const.},$$

und wenn man die Konstante so bestimmt, dafs $y = z$ wird für $x = 1$, so erhält man:

$$xy = z; \tag{3}$$

die Gleichungen (2) und (3) drücken die nämliche Relation zwischen x, y, z aus, mit anderen Worten, sie sind äquivalent.

Wenn die Transscendente

$$\int_1^x \frac{dx}{x}$$

hier zum erstenmal auftritt, mufs man ihr einen Namen geben; wir nennen sie *Logarithmus* und schreiben:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = lx.$$

Dann giebt uns die Gleichung (2), wenn wir xy an Stelle von z einführen:

$$l(xy) = lx + ly,$$

und dies ist die Fundamentaleigenschaft des Logarithmus.

An Stelle der Logarithmen können wir nun auch die inversen Funktionen einführen; es sei:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = u, \quad \int_1^y \frac{dy}{y} = v, \quad \int_1^z \frac{dz}{z} = w.$$

Da u eine Funktion von x ist, so kann man auch x als eine Funktion von u betrachten; wir bezeichnen diese Funktion mit dem Symbol e^u, so folgt:

$$x = e^u, \quad y = e^v, \quad z = e^w,$$

und die Gleichungen (2) und (3) erhalten die Form:

$$u + v = w, \quad e^u \cdot e^v = e^w,$$

folglich:

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v,$$

wodurch die Fundamentaleigenschaft der Exponentialfunktion ausgedrückt ist.

684. Der Arcus Tangens. Wir betrachten zweitens die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0. \tag{4}$$

Die Variabelen sind getrennt, und das Integral erhält, wenn man mit z den Wert bezeichnet, welchen y für $x = 0$ annehmen soll, die Form:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}. \tag{5}$$

Die Gleichung (4) läfst sich aber noch folgendermafsen schreiben:

$$[1 - xy + y(x+y)]\,dx + [1 - xy + x(x+y)]\,dy = 0$$

oder:

$$(1 - xy)(dx + dy) - (x + y)\,d(1 - xy) = 0$$

oder endlich:

$$\frac{(1-xy)\,d(x+y) - (x+y)\,d(1-xy)}{(1-xy)^2} = 0.$$

Die linke Seite ist nun das Differential von $\frac{x+y}{1-xy}$, und diese Gröfse wird für $x = 0$ und $y = z$ ebenfalls gleich z; folglich wird das Integral der Gleichung (4), das schon durch die Gleichung (5) dargestellt ist, auch gleich:

$$\frac{x+y}{1-xy} = z. \tag{6}$$

Wir setzen nun:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x = u,$$

$$\int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arc\,tang} y = v,$$

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tang} z = w,$$

so haben wir für die neue Transscendente die Gleichungen:

$$\text{arc tang}\, x + \text{arc tang}\, y = \text{arc tang}\, z = \text{arc tang}\, \frac{x+y}{1-xy},$$

die für alle reellen Werte der Variabelen x, y Geltung hat, während wir bei komplexen Werten die singulären Punkte

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

noch näher untersuchen müfsten. Definiert man die inversen Funktionen durch das Symbol tang u, so erhalten die Gleichungen (5) und (6) die Form:

$$u + v = w, \quad \frac{\text{tang}\, u + \text{tang}\, v}{1 - \text{tang}\, u\, \text{tang}\, v} = \text{tang}\, w,$$

folglich ist:

$$\text{tang}\,(u + v) = \frac{\text{tang}\, u + \text{tang}\, v}{1 - \text{tang}\, u\, \text{tang}\, v},$$

und dies ist die Fundamentaleigenschaft der Funktion tang u.

685. Der Arcus Sinus. Wir betrachten schliefslich noch die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0. \tag{7}$$

Das Integral, derart bestimmt, dafs für $x = 0$ $y = z$ ist, wird:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{8}$$

Multipliziert man aber die Differentialgleichung mit dem Faktor

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy,$$

so folgt:

$$\left[\sqrt{1-y^2}\,dx - x\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\right] + \left[\sqrt{1-x^2}\,dy - y\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = 0$$

oder:

$$d\left(x\sqrt{1-y^2}\right) + d\left(y\sqrt{1-x^2}\right) = 0.$$

Das Integral wird also, wenn man es gleichfalls so bestimmt, dafs $y = z$ ist für $x = 0$:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = z. \tag{9}$$

Multipliziert man die Differentialgleichung (7) mit der linken Seite von (9), so kommt links wieder ein vollständiges Differential heraus, nämlich das von:

$$\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}-xy.$$

Man braucht also blofs diesen Ausdruck konstant zu setzen, um das Integral der Gleichung (7) in neuer Form zu gewinnen. Bestimmt man die Konstante wiederum so, dafs für

$$x=0,\ y=z$$

wird, so erhält man:

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy=\sqrt{1-z^2}. \tag{10}$$

Die drei Gleichungen (8), (9), (10) stellen die nämliche Relation zwischen den Gröfsen x, y, z dar. Die letzten beiden sind algebraisch, während die erste transscendente Funktionen enthält.

Setzen wir nun:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=u,\qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=v,\qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=w,$$

so ist u eine Funktion von x, und wir können auch umgekehrt x sowohl, wie $\sqrt{1-x^2}$ als Funktionen von u betrachten, wenigstens solange der absolute Betrag von x kleiner als eins ist. Wir bezeichnen diese Funktion mit dem Symbol $\sin u$, $\cos u$, so ist:

$$x=\sin u,\qquad y=\sin v,\qquad z=\sin w.$$
$$\sqrt{1-x^2}=\cos u,\quad \sqrt{1-y^2}=\cos v,\quad \sqrt{1-z^2}=\cos w.$$

Die Gleichung (8) wird:

$$u+v=w,$$

und die Gleichungen (9) und (10) geben folglich die Relationen:

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v,$$
$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v,$$

wodurch die Fundamentaleigenschaften der Funktionen *sinus* und *cosinus* ausgedrückt sind. Man könnte nun auch auf diesem Wege die anderen bekannten Eigenschaften dieser

Funktionen, z. B. ihre Periodizität, aufs neue ableiten; doch wollen wir hierbei nicht verweilen, sondern diese Betrachtungen nur noch schließlich, nach dem Vorgang von Euler, auf den Beweis der charakteristischen Eigenschaft der elliptischen Funktionen anwenden.

686. Das elliptische Integral erster Gattung. Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = 0, \tag{1}$$

wobei k^2 eine gegebene Größe zwischen 0 und 1 bezeichnet. Die Variabelen sind hier getrennt, und wenn man das Integral so bestimmt, daß für $x = 0$, $y = z$ wird, so erhält man:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}, \tag{2}$$

eine Gleichung, in welcher jedes Glied ein elliptisches Integral erster Gattung ist.

Euler hat nun erkannt, daß die Gleichung (1) auch ein algebraisches Integral besitzt; dasselbe läßt sich bestimmen, indem man folgendermaßen vorgeht. Wir setzen:

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2),$$
$$Y = (1 - y^2)(1 - k^2y^2),$$

so daß die vorgelegte Gleichung die Form bekommt:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

oder, indem man die Nenner beseitigt und dabei die Gleichung mit einer noch unbekannten Funktion T multipliziert:

$$T\sqrt{Y}dx + T\sqrt{X}dy = 0. \tag{3}$$

Nun ist aber:

$$T\sqrt{Y}dx = d(xT\sqrt{Y}) - \frac{TxdY}{2\sqrt{Y}} - x\sqrt{Y}dT,$$

$$T\sqrt{X}dy = d(yT\sqrt{X}) - \frac{TydX}{2\sqrt{X}} - y\sqrt{X}dT,$$

und die Gleichung (3) wird sonach:

$$(4)\qquad d[T(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})]-\frac{T}{2}\left(\frac{xY'dy}{\sqrt{Y}}+\frac{yX'dx}{\sqrt{X}}\right) \\ -(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})dT=0,$$

X' und Y' bezeichnen die Ableitungen $\frac{dX}{dx}, \frac{dY}{dy}$.

Man kann nun die Funktion T so bestimmen, daſs sich diese Gleichung auf

$$(5)\qquad d[T(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})]=0$$

reduziert. Zu dem Zwecke müssen sich die übrigen Terme auf Grund der Gleichung (1) gegenseitig aufheben. Ersetzen wir also dT durch

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy,$$

und bemerken wir, daſs dx und dy proportional zu $\sqrt{X}$ und $-\sqrt{Y}$ sind, so hat die Funktion T der Bedingung zu genügen:

$$(6)\quad \frac{T}{2}(xY'-yX')-(y\sqrt{X}+x\sqrt{Y})\left(\frac{\partial T}{\partial x}\sqrt{X}-\frac{\partial T}{\partial y}\sqrt{Y}\right)=0.$$

Diese Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung; für unseren Zweck genügt es aber, irgend eine partikulare Lösung derselben zu kennen. Wir untersuchen, ob ein rationaler Wert von T diese Gleichung befriedigt; man erkennt, daſs, wenn solch ein Wert existiert, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial y}$ proportional zu y und x sein müssen, damit die Quadratwurzeln aus der Gleichung (6) verschwinden. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man für T eine Funktion des Produktes xy wählt, denn bezeichnet man mit T' die Ableitung von T in Bezug auf dieses Produkt, so wird:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=T'y,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=T'x.$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung (6) ergiebt:

$$\frac{T'}{T}=\frac{xY'-yX'}{2(y^2X-x^2Y)},$$

oder, wenn man an Stelle von X, Y, X', Y' ihre Werte einsetzt:

$$(7)\qquad \frac{T'}{T}=\frac{2k^2xy}{1-k^2x^2y^2};$$

dieser Ausdruck ist in der That eine rationale Funktion des Produktes xy, und diese Funktion ist die Ableitung von

$$-l(1-k^2x^2y^2);$$

das Integral der Gleichung (7) ist also:

$$lT = -l(1-k^2x^2y^2) + \text{const.}$$

Die Konstante können wir gleich null setzen, und demnach wird:

$$T = \frac{1}{1-k^2x^2y^2}. \tag{8}$$

Dieser Wert von T genügt der Gleichung (6), folglich erhält die Gleichung (1) die Form:

$$d\,\frac{x\sqrt{Y}+y\sqrt{X}}{1-k^2x^2y^2} = 0, \tag{9}$$

also wird ihr Integral:

$$\frac{x\sqrt{Y}+y\sqrt{X}}{1-k^2x^2y^2} = \text{const.}$$

Setzt man für X und Y ihre Werte ein, und bestimmt man die Konstante so, daſs für $x=0$, $y=z$ wird, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}+y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2} = z. \tag{10}$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man nun auch die beiden Wurzeln:

$$\sqrt{1-z^2} \text{ und } \sqrt{1-k^2z^2},$$

welche die Werte von

$$\sqrt{1-y^2} \text{ und } \sqrt{1-k^2y^2}$$

für $x=0$ darstellen, als Funktionen von x und y ausdrücken; man findet leicht:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2y^2}}{1-k^2x^2y^2} = \sqrt{1-z^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2y^2}-k^2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-k^2x^2y^2} = \sqrt{1-k^2z^2}. \tag{12}$$

687. Elliptische Funktionen. Jede der Gleichungen (2), (10), (11), (12) stellt das Integral der Gleichung (1) dar, in welchem für $x=0$, $y=z$ wird. Setzt man nun:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = u, \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = v,$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}} = w,$$

und ferner, wie in Nr. 647:

$$x = \sin am\, u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos am\, u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\, am\, u,$$

so wird die Gleichung (2):

$$w = u + v,$$

und die Gleichungen (10), (11), (12) geben folglich:

$$\sin am\,(u+v) = \frac{\sin am\, u \cos am\, v\; \Delta\, am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\; \Delta\, am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v},$$

$$\cos am\,(u+v) = \frac{\cos am\, u \cos am\, v - \sin am\, u \sin am\, v\; \Delta\, am\, u\; \Delta\, am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v},$$

$$\Delta\, am\,(u+v) = \frac{\Delta\, am\, u\; \Delta\, am\, v - k^2 \sin am\, u \sin am\, v \cos am\, u \cos am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}.$$

Diese Formeln stellen das Additionstheorem der elliptischen Funktionen dar. Wir beschränken uns hierbei auf die Angabe dieses Resultates, dessen Beweis noch nicht bei unbeschränkter Variabilität der Argumente geführt ist, das wir indessen nicht weiter entwickeln können, ohne die Grenzen, welche wir uns gesteckt haben, zu überschreiten.

§ 3. Der Multiplikator.

688. Begriff des Multiplikators. Ist die Differentialgleichung nach dem Differentialquotienten aufgelöst, also von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

so kann man auf beliebig viele verschiedene Weisen

$$F(x, y) = -\frac{P}{Q}$$

setzen, wobei P und Q Funktionen von x und y sind, dann erhält die gegebene Differentialgleichung die Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Sind die Funktionen P und Q so gewählt, daſs $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential ist (Nr. 611), wenn x sowohl wie y als unabhängige Variabele angesehen werden, so daſs man

$$du = Pdx + Qdy$$

setzen kann, wobei u eine Funktion von x und y ist, so ist evident, daſs das Integral der gegebenen Gleichung

$$u = \text{const.}$$

wird. Will man aber, nachdem die mit P und Q bezeichneten Funktionen gewählt sind, an die Stelle derselben andere einführen, so werden diese den ersteren bis auf einen Faktor μ gleich, und die gegebene Differentialgleichung erhält die Form

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0.$$

Ist die linke Seite dieser Gleichung das exakte Differential einer Funktion u, so ist das Integral der Gleichung wiederum $u = \text{const.}$ In den beiden letzten Beispielen (Nr. 686, 687) gelang es uns thatsächlich, solche Faktoren μ — man nennt sie *Multiplikatoren* — zu finden. Wir wollen nun zeigen, daſs jede Differentialgleichung erster Ordnung derartige Faktoren besitzt.

689. Satz I. *Sind P und Q zwei gegebene Funktionen der beiden unabhängigen Variabelen x und y, so giebt es immer einen Faktor μ derart, daſs das Produkt dieses Faktors mit dem Differentiale $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential liefert.*

Wir wissen, daſs die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0 \tag{1}$$

ein Integral besitzt. Nimmt man nun an, daſs dieses Integral nach der willkürlichen Konstante, die es enthält, aufgelöst ist, so hat es die Form

$$u = C, \tag{2}$$

wobei u eine Funktion von x und y ist. Die Gleichung (2) ergiebt durch Differentiation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \tag{3}$$

und der Wert von $\frac{dy}{dx}$, welcher aus dieser Gleichung folgt,

mufs bei jedem Werte von x und y gleich sein dem Werte, den die Differentialgleichung (1) liefert; also ist

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q}. \tag{4}$$

Diese Gleichung (4) besteht zunächst auf Grund der Gleichung (2), aber man erkennt, dafs sie in der That identisch bei allen Werten von x und y bestehen mufs; denn sie ist unabhängig von C, und der Wert von y, welcher durch die Gleichung (2) gegeben ist, ist eine Funktion von x und C. Bei jedem Werte von x kann daher y noch willkürlich fixiert werden.

Bezeichnet man mit μ den gemeinsamen Wert der beiden Quotienten in der Gleichung (4), so wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu Q,$$

und folglich ist:

$$\mu(Pdx + Qdy) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du. \tag{5}$$

Der Ausdruck $Pdx + Qdy$ wird also ein exaktes Differential, wenn er mit dem Faktor μ multipliziert wird. In Übereinstimmung mit voriger Nummer nennen wir ihn daher einen *Multiplikator* oder auch einen *integrierenden Faktor* der Differentialgleichung. Das Integral $u = \text{const}$ läfst sich dann nach der früheren Regel durch blofse Quadraturen bestimmen, sobald solch ein Faktor ermittelt ist.

690. Folgerungen. — Satz II. *Es giebt unendlich viele Faktoren, durch welche der Ausdruck $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential wird.*

Wir haben bewiesen, dafs immer ein Faktor μ existiert, so dafs

$$\mu(Pdx + Qdy) = du$$

wird, wobei u eine Funktion von x und y ist. Multipliziert man nun diese Gleichung mit einer beliebigen Funktion $\varphi(u)$ von u, so wird

$$\mu\varphi(u)(Pdx + Qdy) = \varphi(u)du,$$

und dies ist ebenfalls ein exaktes Differential. Wie also auch

die Funktion $\varphi(u)$ gewählt sein mag, das Differential wird exakt, sobald man es mit dem Faktor $\mu\varphi(u)$ multipliziert.

Zu bemerken ist dabei noch, dafs $\mu\varphi(u)$ der allgemeine Ausdruck für alle integrierenden Faktoren ist. Denn ist M solch ein Faktor, und also:

$$M(Pdx + Qdy) = dU,$$

wobei U eine Funktion von x und y bedeutet, so ist

$$Pdx + Qdy = \frac{dU}{M} = \frac{du}{\mu},$$

demnach

$$dU = \frac{M}{\mu}\,du.$$

Da nun u eine Funktion von x und y ist, so kann man y als Funktion von u und x betrachten; also ist U eine Funktion von u und x. Die letzte Gleichung aber zeigt, dafs die partielle Ableitung von U nach x null ist. Hieraus folgt, dafs U nur eine Funktion von u allein ist, und dafs folglich auch dasselbe für die Ableitung $\frac{\partial U}{\partial u}$ gilt; mithin wird

$$\frac{M}{\mu} = \varphi(u) \quad \text{oder} \quad M = \mu\varphi(u),$$

was zu beweisen war.

Satz III. *Sind M und μ zwei integrierende Faktoren des Differentiales $Pdx + Qdy$, und ist der Quotient dieser beiden Faktoren nicht identisch konstant, so ist das vollständige Integral der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ gleich $\frac{M}{\mu} = C$, wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet.*

Nach unserer Annahme ist

$$\mu(Pdx + Qdy) = du,$$

und da auch das Produkt $M(Pdx + Qdy)$ ein exaktes Differential ist, so ist nach dem vorigen Satze:

$$\frac{M}{\mu} = \varphi(u),$$

wobei $\varphi(u)$ eine bestimmte Funktion von u oder eine Konstante sein mufs, doch haben wir den letzteren Fall ausgeschlossen. Die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ läfst

sich nun in der Form schreiben $du = 0$, ihr Integral ist also $u = \text{const}$ oder, was auf das nämliche hinauskommt:

$$\varphi(u) = \text{const.}, \quad \text{d. h.} \ \frac{M}{\mu} = C.$$

Wir werden später noch wichtige Anwendungen von diesem Satze machen.

Zum Schlufs dieser Nummer wollen wir aus der Bedingung Nr. 611 eine partielle Differentialgleichung für den Multiplikator ableiten. Soll der Ausdruck

$$\mu P dx + \mu Q dy \tag{1}$$

ein exaktes Differential sein, so mufs nach Nr. 611 die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

oder

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Diese Gleichung, von welcher die unbekannte Funktion μ abhängt, ist eine partielle Differentialgleichung; die Bestimmung von μ beruht also sozusagen auf einem Probleme höherer Ordnung als die ursprüngliche Aufgabe der Integration der Gleichung

$$P dx + Q dy = 0.$$

Es giebt indessen gewisse Fälle, aus denen sich der Faktor μ auf Grund dieser Gleichung leicht ermitteln läfst; die einfachsten derselben wollen wir hier angeben.

691. Die homogene Gleichung. Sind P und Q homogene Funktionen vom gleichen Grade m, so kann man eine homogene Funktion μ vom Grade n finden, so dafs

$$\mu(P dx + Q dy) \tag{1}$$

ein exaktes Differential wird. Denn es wird μP eine homogene Funktion vom Grade $m + n$, und folglich ist identisch (Nr. 90 und 139):

$$x\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + y\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = (m + n)\mu P.$$

Die Bedingung, dafs der Ausdruck (1) exakt ist, nämlich:

(2) $$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

kann also in der Form geschrieben werden:

$$x\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + y\,\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = (m + n)\mu P$$

oder weil

$$y\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q y)}{\partial x}$$

und

$$x\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P x)}{\partial x} - \mu P$$

ist:

$$\frac{\partial[\mu(Px + Qy)]}{\partial x} = (m + n + 1)\mu P.$$

Die Zahl n ist noch unbestimmt; wir setzen also:

$$m + n + 1 = 0;$$

folglich wird die Bedingung (2):

(3) $$\frac{\partial[\mu(Px + Qy)]}{\partial x} = 0.$$

Die analoge Untersuchung lehrt, daſs die Bedingung (2) auch in der Form:

(4) $$\frac{\partial[\mu(Px + Qy)]}{\partial y} = 0$$

dargestellt werden kann, und die Gleichungen (3) und (4) besagen, daſs $\mu(Px + Qy)$ eine Konstante ist. Setzt man dieselbe gleich 1, so wird

(5) $$\mu = \frac{1}{Px + Qy}.$$

Hieraus folgt, daſs, wenn P und Q homogene Funktionen desselben Grades sind, der Ausdruck

$$\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy}$$

ein exaktes Differential ist. Um also die Differentialgleichung

(6) $$Pdx + Qdy = 0$$

zu integrieren, hat man nach der Methode der Nr. 612 das Integral des exakten Differentiales

$$\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy}$$

zu bestimmen und dasselbe gleich einer Konstante zu setzen.

Ist die linke Seite der Gleichung (6) selbst schon ein exaktes Differential, so kennen wir zwei integrierende Faktoren der Gleichung (6), nämlich

$$\frac{1}{Px+Qy} \text{ und } 1;$$

setzt man den Quotienten dieser beiden Faktoren gleich einer willkürlichen Konstante, so erhält man das vollständige Integral (Nr. 690, Satz III); dasselbe wird dann:

$$Px + Qy = C.$$

Diese Methode unterscheidet sich im Grunde nicht von der früheren in Nr. 673 behandelten; denn ist

$$\frac{P}{Q} = -f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so wird die linke Seite der Gleichung (6):

$$Q\left[dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx\right]$$

oder, indem man

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx$$

setzt:

$$Qx[z - f(z)]\left[\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)}\right].$$

Durch diese Transformation wurde früher die Trennung der Variabelen herbeigeführt, und man sieht, dafs dieser Ausdruck ein exaktes Differential wird, wenn man ihn mit dem Faktor

$$\frac{1}{Qx[z-f(z)]} = \frac{1}{Px+Qy}$$

multipliziert.

692. Die lineare Gleichung. Der integrierende Faktor μ des Differentiales

$$Pdx + Qdy$$

läfst sich auch leicht bestimmen, falls man von ihm weifs, dafs er nur eine Funktion von x oder von y allein ist. Nehmen wir z. B. an, dafs μ nur von x abhängt, dafs also $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ist,

so bekommt die allgemeine Gleichung des integrierenden Faktors, nämlich:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

die Form:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu}.$$

Unsere Annahme erfordert nun, daſs der Quotient

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = X$$

ist, wobei X nur eine Funktion von x bedeutet. Ist dieses der Fall, so wird

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = X \quad \text{oder} \quad \frac{d\mu}{\mu} = X dx,$$

also:

$$l\mu = \int_{x_0}^{x} X dx + \text{const} \quad \text{oder} \quad \mu = Ce^{\int_{x_0}^{x} X dx}.$$

Nehmen wir, was immer gestattet ist, an, daſs $Q = 1$ ist; damit dann der obige Quotient nur eine Funktion von x allein ist, muſs

$$\frac{\partial P}{\partial y} = X$$

unabhängig von y sein, d. h. $P = Xy + X_1$; X und X_1 sind Funktionen von x. Der Differentialausdruck hat dann die Form:

$$dy + (Xy + X_1)dx,$$

und $e^{\int_{x_0}^{x} X dx}$ ist ein integrierender Faktor. Um also die *lineare* Gleichung:

$$dy + (Xy + X_1)dx = 0$$

zu integrieren (Nr. 675), hat man sie mit dem integrierenden Faktor zu multiplizieren; es wird

$$dy e^{\int_{x_0}^{x} X dx} + y e^{\int_{x_0}^{x} X dx} X dx + e^{\int_{x_0}^{x} X dx} X_1 dx = 0,$$

und die Integration ergiebt:

$$y e^{\int_{x_0}^{x} X dx} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} X dx} X_1 dx = \text{const.}$$

698. Ein letztes Beispiel. Wir untersuchen schliefslich nur noch den Fall, wo der Ausdruck $Pdx + Qdy$ exakt wird, wenn man ihn mit einem Faktor μ von der Form XY multipliziert, wobei X und Y bezüglich Funktionen von x und y sind. Die Bedingungsgleichung ist hier

$$\frac{\partial(XYP)}{\partial y} = \frac{\partial(XYQ)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{X} - P \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{Y};$$

dies erfordert, dafs die Differenz

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

von der Form ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\varphi(x) - P\psi(y).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man setzen:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x} = \varphi(x), \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \psi(y),$$

also:

$$X = e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x) dx}, \quad Y = e^{\int_{y_0}^{y} \psi(y) dy}, \quad \mu = XY.$$

§ 4. Differentialgleichungen, die auf projektiven Transformationen basieren.

Bei den Differentialgleichungen, die wir in diesem Paragraphen behandeln, sind es immer lineare Transformationen der Variabelen, durch die wir die Integration, wenn sie überhaupt gelingt, erreichen. Schon dieser Umstand, sowie der geometrische Charakter der einzelnen Beispiele läfst einen engen Zusammenhang mit den sogenannten projektiven Transformationen (Nr. 707) vermuten. Genauer wird dieser

Zusammenhang aber erst im § 5 erörtert werden können. In diesem Paragraphen aber werden wir die analytische Behandlung der Probleme in den Vordergrund stellen und daher die genauere Erklärung für die Überschrift noch schuldig bleiben.

694. Die Differentialgleichung, deren Koeffizienten lineare homogene Funktionen sind. *Das Integral der Differentialgleichung*

$$(ax + by)dx + (a'x + b'y)dy = 0$$

zu bestimmen, in welcher a, b, a', b' *gegebene Konstanten sind.*

Durch die Substitution:

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx$$

wird die vorgelegte Gleichung:

$$x(a + bz)dx + x(a' + b'z)(xdz + zdx) = 0$$

oder:

$$\frac{(a' + b'z)dz}{a + (b + a')z + b'z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

oder:

$$2\frac{dx}{x} + \frac{(b + a') + 2b'z}{a + (b + a')z + b'z^2}dz + \frac{(a' - b)}{a + (b + a')z + b'z^2}dz = 0.$$

Die ersten beiden Glieder dieser Summe sind das Differential von

$$l(x^2) + l[a + (b + a')z + b'z^2] = l[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2],$$

folglich erhält man durch Integration:

$$l[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \int \frac{(a' - b)dz}{a + (b + a')z + b'z^2}dz = \text{const.}$$

Setzt man

$$(a' - b)^2 - 4(ab' - ba') = \pm H,$$

wobei H eine positive Gröſse ist, so bekommt das Integral der obigen Gleichung den Wert:

$$\frac{a' - b}{\sqrt{H}} l \frac{2b'z + b + a' - \sqrt{H}}{2b'z + b + a' + \sqrt{H}}$$

oder:

$$\frac{2(a' - b)}{\sqrt{H}} \text{arc tang} \frac{2b'z + b + a'}{\sqrt{H}},$$

je nachdem $\pm H$ einen positiven oder einen negativen Wert bedeutet. Also wird das Integral der gegebenen Differentialgleichung im ersten Falle gleich:

$$l[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \frac{a' - b}{\sqrt{H}} l \frac{2b'y + (b + a' - \sqrt{H})x}{2b'y + (b + a' + \sqrt{H})x} = C,$$

im zweiten Falle gleich:

$$l[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \frac{2(a' - b)}{\sqrt{H}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2b'y + (b + a')x}{x\sqrt{H}} = C.$$

Ist $H = 0$, so wird das letzte Glied algebraisch, und man erkennt leicht, daſs es den Wert hat:

$$\frac{-2(a' - b)x}{2b'y + (b + a')x}.$$

Das Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist nur dann eine algebraische Funktion, wenn die Gröſse $\pm H$ positiv ist, und in diesem Falle muſs dann überdies

$$\frac{a' - b}{\sqrt{H}}$$

ein rationaler Bruch sein.

695. Integration derselben Gleichung nach einer neuen Methode. Dieselbe Differentialgleichung läſst sich noch in anderer Weise integrieren, was zu einer einfacheren Einsicht in die Natur der Integralfunktion führt und insbesondere das Verhalten derselben in dem singulären Punkte erkennen läſst, für welchen

$$ax + by = 0 \quad \text{und} \quad a'x + b'y = 0,$$

also

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

wird, und welcher hier der einzige im Endlichen gelegene singuläre Punkt ist. Führt man an Stelle der Variabelen x und y zwei neue Variabele ξ und η durch die lineare Substitution

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

ein, so kann man die Konstanten λ_1 und λ_2 so bestimmen, daſs die Differentialgleichung die Form erhält:

$$g\eta d\xi + g'\xi d\eta = 0.$$

Der Sinn dieser Transformation ist der, dafs zwei lineare partikulare Integrale

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0$$

ermittelt werden. Es wird nämlich:

$$d\xi = dx + \lambda_1 dy, \quad d\eta = dx + \lambda_2 dy,$$

also:

$$g(x + \lambda_2 y)(dx + \lambda_1 dy) + g'(x + \lambda_1 y)(dx + \lambda_2 dy) = 0,$$

und soll diese Gleichung mit der ursprünglichen identisch sein, so mufs:

$$g + g' = a, \qquad g\lambda_1 + g'\lambda_2 = a',$$

$$g\lambda_2 + g'\lambda_1 = b, \quad \lambda_1\lambda_2(g + g') = b'$$

sein. Hieraus folgt, wenn wir den speziellen Fall $a = 0$ beiseite lassen:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{b'}{a}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a' + b}{a},$$

d. h. λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a\lambda^2 - (a' + b)\lambda + b' = 0.$$

Alsdann sind g und g' zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$g + g' = a, \quad g\lambda_2 + g'\lambda_1 = b,$$

und es wird:

$$(g\lambda_1 + g'\lambda_2)(g'\lambda_1 + g\lambda_2) = a'b = g^2\lambda_1\lambda_2 + g'^2\lambda_1\lambda_2 + gg'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

ferner:

$$\lambda_1\lambda_2(g + g')^2 = ab',$$

also:

$$a'b - ab' = gg'(\lambda_1 - \lambda_2)^2,$$

und das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$g\eta d\xi + g'\xi d\eta = 0$$

wird:

$$\xi^g \eta^{g'} = \text{const.} \tag{1}$$

oder:

$$(x + \lambda_1 y)^g (x + \lambda_2 y)^{g'} = C.$$

Diese Gleichung umfafst folgende Fälle, wenn die Koeffizienten a, a', b, b' als reell vorausgesetzt werden:

1. Sind die beiden Wurzeln λ von 0 verschieden, ungleich und reell, also:

$$4ab' - (a' + b)^2 = 4(ab' - a'b) - (a' - b)^2 < 0,$$

so sind auch g und g' beide reell, und entweder von gleichem Zeichen, wenn

$$a'b - ab' > 0$$

ist, oder von ungleichem, wenn

$$a'b - ab' < 0$$

ist. Im ersten Falle haben die Integralkurven

$$(x + \lambda_1 y)^g (x + \lambda_2 y)^{g'} = C$$

die Eigenschaft, dafs *nur die Kurve, für welche $C = 0$ ist, durch den singulären Punkt hindurchgeht;* d. h. die Geraden

$$x + \lambda_1 y = 0 \quad \text{und} \quad x + \lambda_2 y = 0$$

sind partikulare Integrale der Differentialgleichung, sie bilden zwei ausgezeichnete Richtungen in dem singulären Punkte. Im zweiten Falle nehme man g als positiv an, g' als negativ und gebe der Integralfunktion die Form:

$$(x + \lambda_1 y)^g = C(x + \lambda_2 y)^{-g'},$$

so erkennt man, *dafs jede Kurve des Integralsystemes durch den singulären Punkt hindurchgeht*, und zwar wird, je nachdem $-\frac{g}{g'}$ kleiner oder gröfser als eins ist, immer nur eine der beiden ausgezeichneten Richtungen von allen übrigen Integralkurven berührt, während für den ganz speziellen Fall $g = -g'$ die Integralkurven in dem singulären Punkte lauter verschiedene Tangentenrichtungen erhalten. Ist

$$ab' - ba' = 0,$$

so erhält man ein System von parallelen Geraden, von denen eine durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht; eine andere durch diesen Punkt gehende Gerade löst sich als Faktor aus der Differentialgleichung ab. Die Kurven sind algebraisch, wenn $\frac{g}{g'}$ rational ist, d. h. wenn

$$\frac{a' - b}{\sqrt{(a' - b)^2 - 4(ab' - a'b)}}$$

rational ist, wie früher schon gefunden wurde.

2. Sind die beiden Wurzeln konjugiert imaginär, also:

$$4ab' - (a' + b)^2 = 4(ab' - a'b) - (a' - b)^2 > 0,$$

so sind auch die beiden Wurzeln g und g' im allgemeinen ebenfalls konjugiert imaginär, und giebt man denselben die Form

$$g = \alpha + i\beta, \quad g' = \alpha - i\beta,$$

so wird

$$(x + \lambda_1 y)^{\alpha + i\beta}(x + \lambda_2 y)^{\alpha - i\beta} = C$$

das Integralsystem. Schreibt man die Gröfsen λ_1 und λ_2 in der Form:

$$\lambda_1 = m + in, \quad \lambda_2 = m - in,$$

und setzt man

$$x + my = x', \quad ny = y',$$

so wird dieses System gleich:

$$(x' + iy')^{\alpha + i\beta}(x' - iy')^{\alpha - i\beta} = C$$

oder

$$(x'^2 + y'^2)^{\alpha}\left(\frac{x' + iy'}{x' - iy'}\right)^{i\beta} = C.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten erkennt man, dafs diese Kurven ein System von logarithmischen Spiralen bilden, deren Pol der Koordinatenanfangspunkt ist; *keine reelle Kurve des Integralsystems geht also durch den singulären Punkt*, sondern jede umkreist denselben asymptotisch.

3. Sind die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 einander gleich, also:

$$4(ab' - a'b) - (a' - b)^2 = 0,$$

so ist die angegebene Transformation nicht durchführbar. Da hier:

$$a\lambda^2 - (a' + b)\lambda + b' = 0$$

und

$$2a\lambda - (a' + b) = 0$$

ist, so setze man:

$$x = \xi - \lambda y, \quad dx = d\xi - \lambda dy.$$

Die Differentialgleichung erhält dadurch die Form:

$$d\xi(a\xi + ky) - k\xi dy = 0$$

oder

$$a\frac{d\xi}{\xi} - k\,\frac{\xi dy - y d\xi}{\xi^2} = 0,$$

wobei

$$k = b - a\lambda = a\lambda - a'$$

gesetzt ist; also wird das Integral:

$$a l \xi - k \frac{y}{\xi} = C$$

oder

$$\xi^a = C e^{k \frac{y}{\xi}},$$

d. h. in den ursprünglichen Koordinaten:

$$(x + \lambda y)^a = C e^{k \frac{y}{x + \lambda y}}.$$

In diesem Falle gehen alle Integralkurven durch den singulären Punkt und berühren dort die *eine* ausgezeichnete Richtung

$$x + \lambda y = 0,$$

sie haben im Koordinatenanfangspunkt eine Spitze.

Diese verschiedenen Arten eines singulären Punktes sind im wesentlichen auch für die Singularitäten der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt mafsgebend.

696. Die Koeffizienten sind allgemeine lineare Funktionen. *Das Integral der Differentialgleichung*

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

zu bestimmen. Diese Gleichung ist nicht homogen in Bezug auf die Variabelen x und y, doch kann sie durch eine parallele Verschiebung des Koordinatensystemes in eine homogene verwandelt werden. Setzt man:

$$x = x_0 + x_1, \quad y = y_0 + y_1,$$

wobei x_1 und y_1 die neuen Variabelen bedeuten, und bestimmt man x_0 und y_0 derart, dafs:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

und

$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

wird, so erhält die Differentialgleichung die Form:

$$(ax_1 + by_1)dx_1 + (a'x_1 + b'y_1)dy_1 = 0,$$

und wird also mit der soeben behandelten identisch.

Direkter noch kann man setzen:

$$ax + by + c = u, \quad a'x + b'y + c' = v,$$

wobei u und v die neuen Variabelen sind; alsdann wird:

$$x = \frac{b'(u-c) - b(v-c')}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a(v-c') - a'(u-c)}{ab' - a'b},$$

und die gegebene Differentialgleichung bekommt die Form:

$$u(b'du - bdv) + v(adv - a'du) = 0$$

oder

$$(b'u - a'v)du + (av - bu)dv = 0;$$

sie ist homogen in Bezug auf u und v.

Die beiden Transformationen sind nicht anwendbar, wenn

$$ab' - ba' = 0$$

ist, also

$$b' = \frac{ba'}{a};$$

alsdann ist die Differentialgleichung:

$$(ax + by + c)dx + \left[\frac{a'}{a}(ax + by) + c'\right]dy = 0.$$

Um die Variabelen zu trennen, hat man zu setzen:

$$ax + by = z,$$

also

$$dy = \frac{dz - adx}{b},$$

und die Gleichung wird:

$$adx + \frac{a'z + ac'}{(b - a')z + (bc - ac')}dz = 0,$$

so dafs die Variabelen getrennt sind. Diese Gleichung gilt auch für den Fall, dafs $a' = 0$, $b' = 0$ ist; ist $a = 0$ und $b = 0$, so hat man $a'x + b'y = z$ zu setzen.

697. Die allgemeine Riccatische Gleichung. Unter einer allgemeinen Riccatischen Gleichung verstehen wir eine Differentialgleichung der Form:

$$\frac{dy}{dx} + X_0 \cdot y^2 + X_1 \cdot y + X_2 = 0, \tag{1}$$

wo die X irgend welche gegebene Funktionen von x sind. Wir fragen zunächst, wie man die vollständige Lösung dieser Gleichung aus der partikularen bestimmen kann. Kennt man eine partikulare Lösung y_1, so setze man das allgemeine y gleich:

$$y = y_1 + \frac{1}{\eta}. \tag{2}$$

Dann mufs η der Differentialgleichung genügen:

(3) $$\frac{d\eta}{dx} = X_0 + (X_1 + 2X_0y_1)\cdot\eta.$$

Hier sind das von η freie Glied auf der rechten Seite und der Koeffizient von η bekannte Funktionen von x; η genügt also einer linearen Differentialgleichung, und diese haben wir in Nr. 675 integriert. Wir haben also als erstes Resultat:

Kennt man eine partikulare Lösung der allgemeinen Riccatischen Gleichung, so kann man die übrigen durch Quadraturen finden.

Sind nun η_2, η_3 zwei partikulare Lösungen von (3), η die vollständige, so folgt aus Gleichung (1a) der Nr. 675:

(4) $$\frac{\eta - \eta_2}{\eta - \eta_3} = \text{const.}$$

Seien y_2 und y_3 die partikularen Lösungen von (1), die η_2 und η_3 entsprechen, also nach (2):

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{\eta_2}, \quad y_3 = y_1 + \frac{1}{\eta_3}.$$

Alsdann kann man mittelst dieser Gleichungen und (2) statt der η die y in (4) einführen und gelangt so zu dem neuen Resultat:

(5) $$\frac{y - y_3}{y - y_1} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_1} = \text{const.},$$

also:

Bei der Riccatischen Gleichung ist das Doppelverhältnis aus irgend 4 partikularen Lösungen konstant.

698. Die spezielle Riccatische Gleichung. Die von Riccati selbst behandelte Gleichung ist ein besonderer Fall der in Nr. 697 behandelten allgemeinen Gleichung. Sie lautet:

(1) $$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m;$$

a und b sind konstante Koeffizienten, m ein beliebiger, aber fester Exponent.

Ist $m = 0$, so lassen sich die Variabelen ohne weiteres trennen; es ist:

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + a\,dx = 0,$$

also wird, indem man integriert:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\, l\, \frac{y-\sqrt{\frac{b}{a}}}{y+\sqrt{\frac{b}{a}}} + a(x-C) = 0.$$

Löst man die Gleichung nach y auf, so wird:

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\, \frac{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} + e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} - e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

Ist $\frac{b}{a}$ negativ, so kann man dafür schreiben (Nr. 373):

$$y = \sqrt{-\frac{b}{a}} \operatorname{cotg}\left[a(x-c)\sqrt{-\frac{b}{a}}\right].$$

Die Gleichung (1) ist noch in gewissen Fällen vermittelst algebraischer und logarithmischer oder cyklometrischer Funktionen integrierbar. Der Weg, welchen wir bei dieser Untersuchung einschlagen wollen, besteht darin, dafs wir die Differentialgleichung auf eine andere derselben Form zurückführen, bei welcher der Exponent m null ist.

699. Eine Transformation. Wir führen zunächst die Transformation

$$y = M\bar{y} + N$$

ein, $\bar{y}$ ist eine neue Variabele, M und N sind Funktionen von x, die wir noch beliebig bestimmen können; nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = M\frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{y}\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx},$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung (1) einführt, so folgt:

$$M\frac{d\bar{y}}{dx} + \left(\frac{dM}{dx} + 2aMN\right)\bar{y} + aM^2\bar{y}^2 + \left(\frac{dN}{dx} + aN^2 - bx^m\right) = 0.$$

Um M und N zu bestimmen, setzen wir jetzt:

$$\frac{dN}{dx} + aN^2 = 0, \quad \frac{dM}{dx} + 2aMN = 0.$$

Hier lassen sich in der ersten Gleichung die Variabelen trennen; es ist:

$$\frac{dN}{N^2} + a\,dx = 0,$$

also

$$-\frac{1}{N} + ax = \text{const.}$$

Wir wählen

$$N = \frac{1}{ax},$$

so dafs die zweite Gleichung die Form erhält:

$$\frac{dM}{dx} + \frac{2}{x}M = 0$$

oder

$$\frac{dM}{M} + \frac{2}{x}dx = 0.$$

Demnach wird:

$$lM + l(x^2) = \text{const.}$$

oder

$$Mx^2 = C,$$

so dafs wir

$$M = \frac{1}{x^2}$$

setzen können; die angewandte Transformation ist folglich:

$$y = \frac{\bar{y}}{x^2} + \frac{1}{ax}, \tag{2}$$

und die transformierte Gleichung wird:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{a}{x^2}\bar{y}^2 - bx^{m+2} = 0. \tag{3}$$

Für den Fall $m = -2$ wird diese Gleichung:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = b - a\frac{\bar{y}^2}{x^2},$$

und da die rechte Seite eine Funktion des Quotienten $\frac{\bar{y}}{x}$ ist, so ist sie nach dem Verfahren der Nr. 673 integrierbar. Unsere Transformation führt also zu einer Integration der Riccatischen Gleichung, wenn $m = -2$ ist.

Die Gleichung (3) hat nicht mehr die Form der ursprünglichen, doch erhält sie dieselbe vermittelst einer neuen Transformation der Variabelen; wir setzen:

$$\bar{y} = \frac{1}{y_1}, \quad x = x_1^{\frac{1}{m+3}}, \tag{4}$$

also:

$$d\bar{y} = -\frac{1}{y_1^2}dy_1, \quad dx = \frac{1}{m+3}x_1^{-\frac{m+2}{m+3}}dx_1;$$

substituiert man diese Werte in die Gleichung (3) und bezeichnet man zur Abkürzung:

(5) $$a_1 = \frac{b}{m+3}, \quad b_1 = \frac{a}{m+3}, \quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3},$$

so folgt:

(6) $$\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{m_1}.$$

Diese Gleichung ist der Form nach mit der ursprünglichen identisch; sie ist integrabel, wenn $m_1 = 0$ ist, also wenn $m = -4$ ist; also ist auch die ursprüngliche bei dieser Annahme integrabel.

700. Integrabele Fälle. Die Transformation, durch welche wir von der Gleichung (1) zur Gleichung (6) übergegangen sind, kann nun auf diese letztere angewandt werden, und wendet man denselben Prozeſs weiter an, so erhält man eine unbegrenzte Reihe von transformierten Gleichungen, die man in allgemeiner Weise durch

$$\frac{dy_i}{dx_i} + a_i y_i^2 = b_i x_i^{m_i}$$

bezeichnen kann. Gelangt man dabei zu einer Gleichung, in welcher m_i null ist, so ist diese, wie wir gesehen haben, integrabel, und also sind es auch alle transformierten Gleichungen, die ihr vorangehen.

Man kann leicht die Fälle bestimmen, in denen dies eintritt. Bezeichnen wir mit $\theta(m)$ die Funktion von m, welche durch die Gleichung

$$\theta(m) = -\frac{m+4}{m+3}$$

definiert ist, und setzen wir zur Abkürzung:

$$\theta\theta(m) = \theta^2 m, \quad \theta\theta^2(m) = \theta^3(m), \ldots$$

so ist:

$$m_i = \theta^i(m).$$

Hieraus findet man durch vollständige Induktion:

$$m_i = -\frac{(2i-1)m + 4i}{im + (2i+1)},$$

denn diese Formel gilt für $i = 1$, und man erkennt leicht,

dafs sie, wenn sie für einen Index i gilt, auch für den Index $i+1$ giltig bleibt. Damit nun $m_i = 0$ wird, mufs

$$m = -\frac{4i}{2i-1}$$

sein. Wenn also die Zahl m diese Form hat, wobei i eine ganze positive Zahl ist, so ist die Riccatische Gleichung vermittelst algebraischer und logarithmischer Funktionen integrierbar.

Es giebt aber noch einen anderen Fall der Integrabilität. Macht man die Substitution:

$$y = \frac{1}{Y}, \quad x = X^{\frac{1}{m+1}},$$

so erhält die ursprüngliche Gleichung die Form:

$$\frac{dY}{dX} + \frac{b}{m+1} Y^2 = \frac{a}{m+1} X^{-\frac{m}{m+1}},$$

und diese Gleichung ist nach dem vorigen integrabel, wenn

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}$$

oder

$$m = -\frac{4i}{2i+1}$$

ist. Wir können also die Riccatische Gleichung mittelst der elementaren Funktionen integrieren, wenn die Zahl m die Form hat:

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1},$$

wobei i eine ganze positive Zahl ist. Der Fall $m = -2$, welcher oben behandelt wurde, gehört zu $i = \infty$.

Die Riccatische Gleichung kann in eine lineare Gleichung zweiter Ordnung verwandelt werden, indem man

$$y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{az^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2} = -ay^2 + \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2}$$

setzt; die transformierte Gleichung wird:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - abzx^m = 0.$$

701. Die Jacobische Differentialgleichung. Die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ läfst sich, wie wir gesehen haben (Nr. 696), leicht integrieren, wenn P und Q lineare Funktionen der beiden Variabelen x und y sind. Euler und andere nach ihm haben weiter den Fall untersucht, wo P und Q ganze Funktionen zweiten Grades sind; doch läfst sich hierbei die Integration nur dann auf Quadraturen zurückführen, wenn die Polynome P und Q speziellen Bedingungen genügen.

Die anfangs genannten Differentialgleichungen sind aber als besonderer Fall in einer allgemeineren Gleichung enthalten, für welche Jacobi zuerst eine Methode der Integration gegeben hat. Dies ist die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N \cdot y - M}{N \cdot x - L}, \tag{1}$$

wobei L, M, N lineare Funktionen von x und y sind, nämlich:

$$\begin{cases} L = a_1 x + a_2 y + a_3, \\ M = b_1 x + b_2 y + b_3, \\ N = c_1 x + c_2 y + c_3; \end{cases} \tag{2}$$

die a, b, c sind gegebene Konstanten.

Man kann die Gleichung (1) auch in zwei spalten und schreiben:

$$\frac{dx}{dz} = -N \cdot x + L, \quad \frac{dy}{dz} = -N \cdot y + M.$$

Man erhält so „das Jacobische System". Hier werden x und y Funktionen von einer dritten Veränderlichen z, welche — in die Integralgleichung von (1) eingesetzt — diese identisch befriedigen. Die Koeffizienten können nun als irgendwie gegebene Funktionen von z gedacht werden. Als Spezialfall des Jacobischen Systems kann man die Riccatische Gleichung auffassen, so dafs alle in diesem Paragraphen behandelten Gleichungen sich unter die Jacobische subsumieren. Ist nämlich L identisch null, so wird die erste Gleichung durch $x = 0$ befriedigt. Die zweite Gleichung aber wird für $x = 0$:

$$-\frac{dy}{dz} = c_2 \cdot y^2 + (c_3 - b_2) \cdot y - b_3,$$

das ist die allgemeine Riccatische Gleichung (Nr. 697).

Wir kehren nun zu der Jacobischen Gleichung selbst, also zur Gleichung (1) zurück, denken uns die a, b, c wieder als Konstante und stellen uns die Aufgabe, sie zu integrieren. Wir versuchen zunächst, ob ein partikulares Integral existiert, das durch eine *lineare* Gleichung:

$$U \equiv u_1 x + u_2 y + u_3 = 0 \tag{3}$$

gegeben wird. Wir erhalten durch Differentiation dieser Gleichung in Verbindung mit (1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_1}{u_2} = \frac{Ny - M}{Nx - L}. \tag{4}$$

Es mufs also die Gleichung:

$$u_1(Nx - L) + u_2(Ny - M) = 0$$

für alle Werte bestehen, für welche $U = 0$ ist, und es fragt sich, ob es möglich ist, die Konstanten u_1, u_2, u_3 so zu bestimmen, dafs dies der Fall ist. Es mufs dann die linke Seite der letzten Gleichung, die eine ganze Funktion zweiten Grades ist, in zwei Linearfaktoren zerfallen, von denen der eine U ist. Der andere werde durch

$$H = h_1 x + h_2 y + h_3$$

bezeichnet. Vergleicht man in der so entstehenden Gleichung:

$$u_1(Nx - L) + u_2(Ny - M) = H \cdot U \tag{4a}$$

die entsprechenden Koeffizienten auf beiden Seiten, so ergeben die Koeffizienten von x^2, y^2 und das von x und y freie Glied für h_1, h_2, h_3 die Werte:

$$h_1 = c_1, \quad h_2 = c_2, \quad h_3 = -\frac{a_3 u_1 + b_3 u_2}{u_3}. \tag{4b}$$

Die Koeffizienten von xy stimmen von selbst überein, die von x und y liefern aber zwei Bedingungsgleichungen, für die u, nämlich:

$$\frac{a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3}{u_1} = \frac{a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3}{u_2} = \frac{a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3}{u_3}.$$

Diese sind homogen und vom zweiten Grade in den u. Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der drei Quotienten

mit λ, so entstehen drei homogene lineare Gleichungen für u_1, u_2, u_3, nämlich:

$$(5) \qquad \begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 = \lambda u_1, \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = \lambda u_2, \\ a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 = \lambda u_3. \end{cases}$$

Diese können nur dann zusammen bestehen, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Dies ergiebt eine kubische Gleichung für λ:

$$(6) \qquad F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & b_1 & , c_1 \\ a_2 & , b_2 - \lambda, & c_2 \\ a_3 & , b_3 & , c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ist λ irgend eine Wurzel dieser Gleichung, so ergeben sich für die Verhältnisse der u aus dem System (5) ganze rationale Funktionen zweiten Grades von λ, und man kann U die Form geben:

$$(6a) \qquad U \equiv U_0 + U_1 \cdot \lambda + \lambda^2,$$

wo U_0 und U_1 lineare Funktionen von x und y sind, deren Koeffizienten sich rational durch die a, b, c ausdrücken. Das Ergebnis der bisherigen Untersuchung ist:

Es giebt immer ein partikulares Integral der Jacobischen Gleichung, das durch eine lineare Gleichung

$$(3) \qquad U \equiv u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$$

dargestellt wird.

Um das vollständige Integral zu finden, hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die kubische Gleichung (6) keine, zwei oder drei gleiche Wurzeln besitzt.

1. *Die Gleichung* $F(\lambda) = 0$ *hat keine gleichen Wurzeln.* Dann entsprechen den 3 Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei verschiedene lineare partikulare Integrale (3). Wir bezeichnen sie der Reihe nach mit:

$$\begin{aligned} U &\equiv u_1 x + u_2 y + u_3 = 0, \\ V &\equiv v_1 x + v_2 y + v_3 = 0, \\ W &\equiv w_1 x + w_2 y + w_3 = 0, \end{aligned}$$

so dafs U der Wurzel λ_1, V der Wurzel λ_2, W der Wurzel λ_3 entspricht.

Um nun das vollständige Integral zu finden, gehen wir auf die Identität (4a) zurück, die ausdrückte, daß $U=0$ ein partikulares Integral war. Die drei Wurzeln λ entsprechen drei Identitäten dieser Art; aus ihnen suchen wir nun eine neue zu bilden, deren rechte Seite nicht nur vermöge $U=0$, sondern identisch verschwindet. Zunächst läßt sich der Gleichung (4a) die Form geben:

$$(4c) \qquad \frac{u_1}{U}(Nx-L)+\frac{u_2}{U}(Ny-M)=N-\lambda.$$

Führt man nämlich in

$$H=h_1x+h_2y+h_3$$

auf der rechten Seite die Werte h aus (4b) ein, so erhält H die Gestalt

$$c_1x+c_2y+c_3-\lambda,$$

weil h_3 nach der letzten Gleichung (5) gleich $c_3-\lambda$ ist. Nach der letzten Gleichung (2) ist aber

$$N=c_1x+c_2y+c_3,$$

und daher ergiebt sich die behauptete Identität (4c). Denkt man sich in ihr für λ der Reihe nach λ_1, λ_2, λ_3 gesetzt, so entstehen drei Gleichungen, deren linke Seiten sich aus der von (4c) ergeben, wenn man für U, u_1, u_2 der Reihe nach:

$$\begin{matrix} U, & u_1, & u_2 \\ V, & v_1, & v_2 \\ W, & w_1, & w_2 \end{matrix}$$

setzt. Multipliziert man diese der Reihe nach mit drei Konstanten α, β, γ und addiert sie, so folgt:

$$(4d) \quad \left(\frac{\alpha u_1}{U}+\frac{\beta v_1}{V}+\frac{\gamma w_1}{W}\right)(Nx-L)+\left(\frac{\alpha u_2}{U}+\frac{\beta v_2}{V}+\frac{\gamma w_2}{W}\right)(Ny-M)$$
$$\equiv(\alpha+\beta+\gamma)\cdot N-(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3).$$

Hier wird nun die rechte Seite identisch null, wenn α, β, γ den beiden Gleichungen genügen

$$(8) \qquad \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$(9) \qquad \alpha\lambda_1+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3=0,$$

also wenn man:

$$\alpha = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \beta = \lambda_3 - \lambda_1, \quad \gamma = \lambda_1 - \lambda_2$$

setzt. Treffen wir diese Wahl der Konstanten, so geht die Gleichung (4d), weil $Nx - L$ und $Ny - M$ nach (1) dx und dy proportional sein sollen, über in:

$$\left(\frac{\alpha u_1}{U} + \frac{\beta v_1}{V} + \frac{\gamma w_1}{W}\right) dx + \left(\frac{\alpha u_2}{U} + \frac{\beta v_2}{V} + \frac{\gamma w_2}{W}\right) dy = 0$$

oder

$$\alpha \cdot \frac{dU}{U} + \beta \cdot \frac{dV}{V} + \gamma \cdot \frac{dW}{W} = 0.$$

Hier ist die linke Seite das logarithmische Differential von $U^\alpha V^\beta W^\gamma$. *Also ist:*

(7) $$U^\alpha V^\beta W^\gamma \equiv U^{\lambda_2 - \lambda_3} V^{\lambda_3 - \lambda_1} W^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const.}$$

die vollständige Lösung der Jacobischen Gleichung, solange die kubische Gleichung (6) *drei verschiedene Wurzeln besitzt. Dabei sind U, V, W lineare Funktionen von x und y:*

$$U = u_1 x + u_2 y + u_3,$$
$$V = v_1 x + v_2 y + v_3,$$
$$W = w_1 x + w_2 y + w_3.$$

2. *Die Gleichung $F(\lambda) = 0$ hat eine Doppelwurzel.* Wir leiten diesen Fall aus dem vorigen durch Grenzübergang ab. λ_1 und λ_2 seien die beiden verschiedenen Wurzeln und λ_2 die Doppelwurzel, so daſs $\lambda_2 = \lambda_3$. Sei zunächst $\lambda_3 = \lambda_2 + h$ von λ_2 verschieden. Alsdann ist (7) die Integralgleichung. Nimmt man in dieser die Logarithmen und setzt zur Abkürzung

$$l\,U = f(\lambda),$$

so wird:

$$(\lambda_2 - \lambda_3) f(\lambda_1) + (\lambda_3 - \lambda_1) f(\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) f(\lambda_3) = \text{const.}$$

die Integralgleichung. Führt man

$$\lambda_3 = \lambda_2 + h$$

ein und dividiert durch h, so folgt:

$$f(\lambda_2) - f(\lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{f(\lambda_2 + h) - f(\lambda_2)}{h} = \text{const.}$$

und im Limes für $h = 0$:

(7a) $$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot f'(\lambda_2) + f(\lambda_2) - f(\lambda_1) = \text{const.}$$

Da aber

$$f(\lambda_1) = l\,U, \quad f(\lambda_2) = l\,V$$

ist, so ergiebt sich:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{V'}{V} + \log \frac{V}{U} = \text{const.}$$

Dabei bedeutet V' die Ableitung von V nach λ_2. Der Gleichung (6a) entsprechend ist aber:

$$V = U_0 + U_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2^2,$$

wo U_0 und U_1 linear in x und y und rational in den a, b, c sind. Differentiiert man diesen Ausdruck nach λ_2, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$V' = V_0 + V_1 \cdot \lambda_2,$$

wo V_0 und V_1 ebenso wie U_0 und U_1 beschaffen sind. V' ist also linear in x und y und von der Form:

$$V' = v'_1 x + v'_2 y + v'_3.$$

Gehen wir also in unserer Integralgleichung wieder von den Logarithmen zu den Numeris über, so kommen wir zu dem Ergebnis:

Das Integral von (1) *hat im Falle einer Doppelwurzel die Gestalt:*

$$\text{(7')} \qquad \frac{V}{U} e^{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{V'}{V}} = \text{const.},$$

wo U, V, V' lineare Funktionen von x und y sind:

$$U = u_1 x + u_2 y + u_3,$$
$$V = v_1 x + v_2 y + v_3,$$
$$V' = v'_1 x + v'_2 y + v'_3.$$

3. *Die Gleichung* $F(\lambda) = 0$ *hat eine dreifache Wurzel.* Setzt man in (7a) $\lambda_1 = \lambda_2 + h$ und dividiert durch $-\frac{1}{2}h^2$, so folgt:

$$\frac{f(\lambda_2 + h) - f(\lambda_2) - h f'(\lambda_2)}{\frac{1}{2}h^2} = \text{const.}$$

und an der Grenze für $h = 0$:

$$f''(\lambda_2) = \text{const.}$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert der drei Wurzeln einfach mit $\lambda_2 = \lambda$, so wird:

$$f''(\lambda) = \frac{UU'' - U'^2}{U^2}.$$

Hier sind U' und U'' die erste und zweite Ableitung von

$$U = U_0 + U_1\lambda + \lambda^2$$

nach λ, also lineare Funktionen von x und y. Bezeichnet man daher die Integrationskonstante mit C, so wird die Integralgleichung eine algebraische Gleichung zweiten Grades der Form:

$$UU'' - U'^2 - C \cdot U^2 = 0,$$

wo die U, U', U'' lineare Funktionen von x und y sind:

$$\begin{aligned} U &= u_1 x + u_2 y + u_3, \\ U' &= u'_1 x + u'_2 y + u'_3, \\ U'' &= u''_1 x + u''_2 y + u''_3. \end{aligned}$$

Wir wiederholen:

Hat die kubische Gleichung $F(\lambda) = 0$ eine dreifache Wurzel, so wird das vollständige Integral der Jacobischen Gleichung:

$$(7'') \qquad \frac{UU'' - U'^2}{U^2} = \text{const.},$$

wo U, U', U'' lineare Funktionen von x und y sind.

Wir überlassen es dem Leser, in den Fällen 2. und 3. den expliciten Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Integralgleichung und denen der Differentialgleichung auszurechnen und heben nur noch hervor, daſs — ebenso wie im Falle 1. die U, V, W — so im Falle 2. die U, V, V', im Falle 3. die U, U', U'' *beliebige* lineare Funktionen von x und y sein können und doch die zur Integralgleichung (7) bezw. (7') bezw. (7'') gehörige Differentialgleichung immer von der Form (1), also eine Jacobische wird. Man bestätigt dies unschwer durch direkte Ausrechnung. Es folgt daraus, daſs, solange nicht neue Bedingungen zukommen, die Form der Integralgleichungen sich nicht weiter spezialisiert, als wir durch unsere Überlegungen gefunden haben.

702. Homogene Variabele. Neuerdings hat es sich mehrfach als zweckmäſsig erwiesen, auch in der Theorie der Differentialgleichungen homogene Veränderliche anzuwenden, wie man dies in der Theorie der algebraischen Kurven schon lange that. Wir wollen dem Leser Gelegenheit geben, diese Methode zu üben und ihren Nutzen zu beurteilen, indem wir die Integration der Jacobischen Gleichung, die in der vorigen Nummer durchgeführt ist, noch einmal, aber mit homogenen Variabelen, ausführen. Wegen ihres projektiven Charakters ist die Jacobische Gleichung zu einer solchen Illustration besonders geeignet. Wir setzen nach Nr. 175—177:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

alsdann wird:

$$\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}, \quad x\,dy - y\,dx = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_3^{\,2}}.$$

Die Differentialgleichung (1) erhält daher jetzt die Form:

$$L(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + M(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) + N(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) = 0.$$

An Stelle von L, M, N führen wir die entsprechenden linearen Formen ein:

$$(2) \qquad \begin{cases} L \cdot x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_x \\ M \cdot x_3 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = b_x \\ N \cdot x_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = c_x. \end{cases}$$

Alsdann wird die Jacobische Gleichung in homogener Schreibweise:

$$(1)\; a_x \cdot (x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + b_x(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) + c_x(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) = 0.$$

Soll nun die Gerade:

$$(3) \qquad u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

eine Integralkurve sein, so müssen gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$(3) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

und

$$(4) \qquad u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3 = 0.$$

Es verhält sich also:

$$u_1 : u_2 : u_3 = (x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) : (x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) : (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$

und wegen (1) ist daher:

$$u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x = 0$$

für jeden Punkt der Geraden (3). Die linke Seite dieser Gleichung kann sich daher nur um einen konstanten Faktor λ von u_x unterscheiden. Die resultierende Gleichung:

$$u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x = \lambda \cdot u_x \tag{4a}$$

mufs identisch für alle Punkte (x_1, x_2, x_3) der Ebene gelten, sie zerfällt also in die 3 Gleichungen:

$$\begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 = \lambda u_1, \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = \lambda u_2, \\ a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 = \lambda u_3, \end{cases} \tag{5}$$

die wir in der vorigen Nummer auf weniger einfache Weise fanden. Aus ihnen folgt wie dort für λ die kubische Gleichung:

$$F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & b_1 & , c_1 \\ a_2 & , b_2 - \lambda, & c_2 \\ a_3 & , b_3 & , c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Wir beschränken uns auf den Fall, dafs diese lauter einfache Wurzeln besitzt, die wieder $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heifsen sollen. Ihnen entsprechen drei verschiedene Grade $u_x = 0$, $v_x = 0$, $w_x = 0$, wo:

$$\begin{aligned} u_x &= u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \\ v_x &= v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3, \\ w_x &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3. \end{aligned}$$

Soll nun

$$f \equiv u_x^\alpha v_x^\beta w_x^\gamma = \text{const.} \tag{7}$$

das allgemeine Integral sein, so darf erstlich f nach der Bedeutung der homogenen Variabelen nur von den Verhältnissen der x abhängen. Es ist also eine Form nullter Dimension. Dies giebt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \tag{8}$$

und nach dem Eulerschen Satze (Nr. 90) ist zugleich:

$$(8a) \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Andererseits mufs

$$(8b) \qquad df \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = 0$$

vermöge der Differentialgleichung (1) erfüllt sein. Die drei Gleichungen (1), (8a), (8b) zusammengenommen ergeben:

$$(8c) \qquad a_x \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_x \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_x \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Setzt man für f seinen Ausdruck aus (7) ein, so folgt:

$$\frac{f \cdot \alpha}{u_x}(u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x) + \frac{f \cdot \beta}{v_x}(v_1 a_x + v_2 b_x + v_3 c_x)$$
$$+ \frac{f \cdot \gamma}{w_x}(w_1 a_x + w_2 b_x + w_3 c_x) = 0.$$

Diese Bedingung reduziert sich wegen (4a) auf:

$$f(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma) = 0$$

oder:

$$(9) \qquad \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma = 0.$$

Es folgt also aus (8) und (9) wie oben:

$$\lambda_1 = \beta - \gamma, \quad \lambda_2 = \gamma - \alpha, \quad \lambda_3 = \alpha - \beta,$$

und es wird:

$$(7) \qquad f \equiv u_x^{\lambda_2 - \lambda_3} v_x^{\lambda_3 - \lambda_1} w_x^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const.}$$

das vollständige Integral in der homogenen Form. Die durch (7) dargestellten Kurven heifsen „W-kurven“.

Ein bedeutender Wert der homogenen Darstellung auch für das Integrationsproblem algebraischer Differentialgleichungen liegt, abgesehen von der Symmetrie der Darstellung, sowie von der hier unmittelbar ersichtlichen Dualität des Problemes, in dem Umstande, dafs Resultate, bei denen die unendlich ferne Gerade ausgezeichnet ist, sich ohne weiteres auch übertragen lassen auf Gleichungen, in denen eine endliche Gerade dieselbe Rolle spielt; so ist die oben behandelte Differentialgleichung

$$N(xdy - ydx) - Ldy + Mdx = 0$$

im wesentlichen identisch mit der Gleichung

$$-Ldy + Mdx = 0,$$

wenn L, M, N lineare Funktionen sind, nur dafs bei der letzteren die unendlich ferne Gerade (oder die Gerade $x_3 = 0$) ein partikulares Integral ist, während bei der ersteren an die Stelle derselben eine andere Gerade tritt.

Man erkennt dies am einfachsten, wenn man — zunächst von der allgemeinen Gleichung (1) mit ihrem Integral (7) ausgehend — die Geraden

$$u_x = 0, \quad v_x = 0, \quad w_x = 0$$

als Seiten des Koordinatendreiecks wählt, was sich durch eine lineare Transformation immer erreichen läfst. Nennen wir die neuen Koordinaten wieder x_1, x_2, x_3, so gehen u_x, v_x, w_x über in ax_1, bx_2, cx_3. Das allgemeine Integral wird daher:

$$x_1^{\lambda_2 - \lambda_3} x_2^{\lambda_3 - \lambda_1} x_3^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const.}$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man die zugehörige Differentialgleichung

$$\lambda_1 x_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \lambda_2 x_2(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + \lambda_3 x_3(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0.$$

Die Koeffizienten a_x, b_x, c_x in (1) reduzieren sich also auf:

$$a_x = \lambda_1 x_1, \quad b_x = \lambda_2 x_2, \quad c_x = \lambda_3 x_3.$$

Kehren wir also durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

wieder zu den inhomogenen Koordinaten x, y zurück, so wird nach den Rechnungen dieser Nummer:

$$\text{(1a)} \qquad \alpha y dx + \beta x dy = 0$$

die Differentialgleichung und

$$x^\alpha y^\beta = \text{const.}$$

die Integralgleichung. In dieser einfachen Form hatten wir die in Nr. 695 behandelte Differentialgleichung durch die Gleichung (1) jener Nummer integriert. Nur steht dort ξ, η statt x, y; g, g' für α, β. Dem Integrale $x_3 = 0$ der homogenen Gleichung entspricht aber jetzt in der That die unendlich ferne Gerade in der Gleichung (1a).

§ 5. Die infinitesimale Transformation.

703. Begriff der infinitesimalen Transformation. Der Erfolg, den die bisher vorgetragenen Integrationsmethoden in den einzelnen Fällen gehabt haben, wird verständlich durch Hinzuziehung des modernen Begriffes der *infinitesimalen Transformation.* Dieser giebt gleichzeitig eine Einsicht in den Charakter der bisher behandelten Differentialgleichungen. Wir beginnen damit, einige Kunstausdrücke zu erklären und gehen aus von zwei Gleichungen der Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \varphi(x, y) \cdot t + \cdots \\ y_1 = y + \psi(x, y) \cdot t + \cdots \end{cases}$$

wo die rechten Seiten in der Umgebung von $t = 0$ und innerhalb eines gewissen Bereiches für x und y, indem sich allein die folgenden Betrachtungen bewegen, reguläre analytische Funktionen seien mögen. Jedem Werte des „*Parameters*" t entspricht dann eine bestimmte „*Transformation*" des Punktes (x, y) in einen anderen (x_1, y_1).

Bricht man die Entwickelungen der rechten Seiten hinter den ersten Potenzen von t ab und schreibt

$$\delta t \text{ für } t, \quad \delta x \text{ für } x_1 - x, \quad \delta y \text{ für } y_1 - y,$$

so definieren die entstehenden Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta x = \varphi(x, y) \cdot \delta t \\ \delta y = \psi(x, y) \cdot \delta t \end{cases}$$

eine *infinitesimale Transformation.* Sind die Werte von δt nur klein, so stellen näherungsweise die zugehörigen δx, δy die wirklichen Zunahmen

$$x_1 - x, \quad y_1 - y$$

dar, die für den Parameler δt aus (1) sich ergeben. Man sagt daher, wie dies in ähnlichem Sinne schon früher geschah, die infinitesimale Transformation bewirke „eine unendlich kleine Verschiebung" des Punktes (x, y) in den „unendlich benachbarten" Punkt

$$(x + \delta x, \quad y + \delta y).$$

Bestimmt ist also die infinitesimale Transformation durch die beiden Funktionen φ und ψ, die gewissermaſsen die Ge-

schwindigkeitskomponenten der Verschiebung angeben. Wir bezeichnen daher die infinitesimale Transformation (2) auch kurz durch das Symbol $[\varphi, \psi]$. Der Quotient

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

bestimmt die Richtung der unendlich kleinen Verschiebung und heifst daher kurz die Richtung der infinitesimalen Transformation.

Im Gegensatze zur infinitesimalen Transformation bestimmen die Gleichungen bei gegebenem t eine „endliche Transformation".

Ist $F(x, y)$ irgend eine in der Umgebung der gerade fixierten Stelle (x, y) reguläre analytische Funktion, so entspricht der Reihenentwickelung (1) eine solche für

$$F_1 = F(x_1, y_1),$$

nämlich:

$$F_1 = F + F' \cdot t + \cdots \tag{3}$$

Der Koeffizient F' von t wird dabei nach bekannten Regeln:

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x}\varphi(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}\psi(x, y), \tag{3a}$$

er zeigt die Wirkung, die die infinitesimale Transformation auf die Funktion F ausübt. Denn bricht man die Reihenentwickelung (3) bei den ersten Potenzen ab und schreibt wie vorher δt für t, δF für $F_1 - F$, so wird:

$$\delta F = F' \cdot \delta t = \left(\varphi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta t \tag{4}$$

die „unendlich kleine Änderung", die F bei der infinitesimalen Transformation erfährt.

704. Invarianz gegenüber einer infinitesimalen Transformation. Eine Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

„*gestattet*" eine Transformation (1), oder sie bleibt ihr gegenüber „*invariant*", wenn für alle Punkte (x, y), für die

$$F(x, y) = 0$$

ist, auch

$$F(x_1, y_1) = 0$$

ist, falls x_1 und y_1 durch eine Transformation der Form (1) mit x und y verknüpft sind. Man definiert weiter:

Eine Gleichung
$$F(x, y) = 0$$
gestattet die infinitesimale Transformation, wenn für jedes Wertsystem (x, y), das ihr genügt, δF verschwindet. Hieraus folgt nach (4) der Satz:

Die Gleichung
$$F(x, y) = 0$$
gestattet dann und nur dann die infinitesimale Transformation $[\varphi, \psi]$, *wenn für jedes Wertsystem* (x, y), *das ihr genügt, auch*
$$\varphi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5}$$
ist.

Schreibt man diese Gleichung in der Form:
$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\psi}{\varphi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$
so erkennt man ihre geometrische Bedeutung.

Eine Kurve $F = 0$ geht bei einer unendlich kleinen Verschiebung dann und nur dann in sich über, wenn in jedem ihrer Punkte die Richtung $\frac{\delta y}{\delta x}$ dieser Verschiebung in die
$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$
der Tangente fällt.

Eine *Kurvenschar*
$$F(x, y) = C$$
kann bei einer infinitesimalen Transformation entweder in der Weise invariant bleiben, daſs jede einzelne Kurve *in sich selbst* verschoben wird, oder so, daſs jede Kurve der Schar in eine andere (unendlich benachbarte) der Schar übergeführt wird. Im ersten Falle muſs die oben gefundene Gleichung (5)
$$\varphi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

für jedes Wertepaar gelten, für welches

$$F(x, y) = C$$

ist. Da aber C selbst willkürlich und in (5) nicht enthalten ist, mufs diese Gleichung identisch bestehen. Im zweiten Falle ändert C bei der infinitesimalen Transformation seinen Wert. Es möge sich um $c \cdot \delta t$ vermehren, wenn x und y sich um die in (2) aufgeschriebenen Gröfsen δx und δy vermehren. Alsdann vermehrt sich F nach (4) um:

$$\delta F = \left[\varphi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\right] \cdot \delta t = c \cdot \delta t.$$

Es folgt also, dafs

$$\varphi(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} = c$$

konstant ist, sobald

$$F = C$$

konstant ist. Also mufs

$$\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \psi \frac{\partial F}{\partial y} = \varphi[F(x, y)] \tag{6}$$

eine Funktion von F sein. Wir sehen also:

Eine Kurvenschar

$$F(x, y) = C$$

gestattet dann und nur dann die infinitesimale Transformation $[\varphi, \psi]$, *wenn*

$$\varphi \frac{\partial F}{\partial x} + \psi \frac{\partial F}{\partial y}$$

eine Funktion von F allein ist. Je nachdem diese Funktion identisch null ist oder nicht, geht dabei jede Kurve der Schar in sich oder eine andere über.

705. Anwendung auf Differentialgleichungen. Man sagt, eine Differentialgleichung gestatte eine infinitesimale Transformation, wenn die Schar ihrer Integralkurven sie gestattet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Differentialgleichung sei vom ersten Grade in y'. Soll nun jede Integralkurve in sich übergehen, so mufs die Richtung, welche die infinitesimale Transformation jedem Punkte zuordnet, zusammenfallen mit der, welche die Differentialgleichung:

$$(7) \qquad P dx + Q dy = 0$$

ihm zuordnet; d. h. es mufs:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

sein. Die Integralkurven von (7) bleiben also dann und nur dann bei der infinitesimalen Transformation $[\varphi, \psi]$ einzeln invariant, wenn die Gleichung

$$\frac{\psi}{\varphi} = -\frac{P}{Q}$$

oder:

$$P\varphi + Q\psi = 0$$

identisch besteht.

Soll dagegen nur die Schar der Integralkurven

$$F(x, y) = \text{const.}$$

als solche invariant bleiben, so findet das Kriterium (6) Anwendung.

706. Geometrische Bedeutung des Multiplikators. Gestattet eine Differentialgleichung eine infinitesimale Transformation, so kennt man einen Multiplikator und umgekehrt. Bezeichnet man nämlich einen integrierenden Faktor der Differentialgleichung

$$P dx + Q dy = 0$$

mit μ, so ist:

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Mithin besteht, wenn die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation φ, ψ gestattet, nach Gleichung (6) der Nr. 704 die Relation

$$\mu(P\varphi + Q\psi) = \Phi(F)$$

oder

$$\mu = \frac{\Phi(F)}{P\varphi + Q\psi}.$$

Nach Nr. 690 folgt hieraus, dafs auch der Quotient

$$\frac{1}{P\varphi + Q\psi}$$

integrierender Faktor ist, und sonach ist der Satz bewiesen:

Gestattet die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + 0$$

die infinitesimale Transformation $[\varphi, \psi]$, *so ist der Ausdruck*

$$P\varphi + Q\psi$$

ein integrierender Divisor der Differentialgleichung.

Dieser Satz ist auch umkehrbar:

Ist ein Multiplikator μ *der Differentialgleichung bekannt, und bestimmt man zwei Funktionen* φ *und* ψ *so, dafs*

$$P\varphi + Q\psi = \frac{1}{\mu}$$

wird, so gestattet die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation $[\varphi, \psi]$.

In der That wird:

$$1 = \mu P\varphi + \mu Q\psi = \varphi \frac{\partial F}{\partial x} + \psi \cdot \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Es findet also das Kriterium der Gleichung (6) in Nr. 704 Anwendung, indem $\varphi(F)$ sich auf 1 reduziert.

Da alle integrierenden Faktoren einer Differentialgleichung durch $\mu \Phi(F)$ darstellbar sind, wenn μ einen Multiplikator und F die Integralfunktion bedeutet, so sind auch alle infinitesimalen Transformationen, welche eine Differentialgleichung gestattet, in der Relation

$$P\varphi + Q\psi = \frac{1}{\mu \Phi(F)}$$

enthalten.

Schreibt man die Bedingung dafür, dafs

$$P\varphi + Q\psi$$

ein integrierender Divisor von

$$Pdx + Qdy = 0$$

ist, auf:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P}{P\varphi + Q\psi}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q}{P\varphi + Q\psi}\right], \tag{7}$$

so hat man ein analytisches Kriterium dafür, dafs eine gegebene Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

die infinitesimale Transformation $[\varphi, \psi]$ gestattet.

707. Beispiele. 1. *Die homogene Gleichung*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist so beschaffen, dafs alle Punkte der Ebene, in denen $\frac{dy}{dx}$ denselben Wert hat, auf Geraden liegen, welche vom Koordinatenanfangspunkte ausgehen. Daraus folgt, dafs die Differentialgleichung eine Ähnlichkeitstransformation sogar bei endlicher Verschiebung zuläfst, deren Centrum der Koordinatenanfangspunkt ist. In der That, setzt man

$$x_1 = (1 + t)x, \quad y_1 = (1 + t)y,$$

so behält die Differentialgleichung ungeändert ihre Form. Mithin gestattet sie auch die infinitesimale Transformation

$$\delta x = x \cdot \delta t, \qquad \delta y = y \cdot \delta t,$$

und folglich ist

$$\frac{1}{xf\left(\frac{y}{x}\right) - y}$$

integrierender Faktor.

2. *Parallelkurven.* Eine Differentialgleichung sei so geartet, dafs ihr vollständiges Integralsystem ein Parallelkurvensystem bildet, d. h. trägt man auf den Normalen einer Integralkurve beliebige aber konstante Strecken ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Parallelkurve, welche gleichfalls der Differentialgleichung genügen mufs. Die Kosinus der Winkel, welche die Normale mit den Achsen bildet, sind, wenn

$$F(x, y) = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kurve darstellt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}.$$

Trägt man nun auf der Normalen eine konstante Strecke t ab, so gehen die Koordinaten des Kurvenpunktes x, y über in:

$$x_1 = x + t\cos\alpha = x + t\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}},$$

$$y_1 = y + t\cos\beta = y + t\,\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}.$$

Die infinitesimale Transformation ist demnach:

$$\varphi = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}, \quad \psi = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}},$$

und also

$$\frac{1}{P\varphi + Q\psi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y}} = \mu$$

ein integrierender Faktor. Weil aber

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

ist, so folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Weiſs man also, daſs eine Differentialgleichung

$$P dx + Q dy = 0$$

ein System von Parallelkurven definiert, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

integrierender Faktor. Es ist leicht, auch die Umkehr dieses Satzes zu beweisen.

3. *Rotation.* Läſst man die Punkte (x, y) der Ebene um 0 rotieren, indem man diese um den Winkel t dreht, so gehen x und y über in:

$$x_1 = x\cos t - y\sin t, \quad y_1 = x\sin t + y\cos t.$$

Das Verfahren der Nr. 703 giebt daher für die *infinitesimale Rotation* die Gleichung:

$$\delta x = -y\delta t, \quad \delta y = x\delta t.$$

Gestattet daher eine Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

die infinitesimale Rotation, so ist

$$Py - Qx$$

ein integrierender Divisor. Diese Bemerkung führt z. B. zur Integration der Differentialgleichungen, welche die Krümmungslinien oder Haupttangentenkurven einer Rotationsfläche bestimmen.

708. Die projektiven Transformationen der Geraden. Wir bezeichnen die Punkte einer Geraden durch ihren Abstand y von einem Nullpunkte O auf der Geraden. Man sagt, ein bestimmter Punkt y_0 der Geraden werde in einen anderen Punkt y derselben durch eine *projektive Transformation* übergeführt, wenn y eine rationale Funktion ersten Grades von y_0 ist. Eine projektive Transformation der Geraden ist also definiert durch eine Gleichung der Form:

$$y = \frac{a_1 y_0 + a_0}{b_1 y_0 + b_0}; \tag{1}$$

die Konstanten a, b heifsen die *Parameter* der Transformation. Im besonderen entspricht den Werten

$$a_1 = 1, \quad a_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 1$$

die *identische Transformation*

$$y = y_0,$$

welche den Punkt in Ruhe läfst.

Die rechte Seite von (1) hängt nur von den drei Verhältnissen ab:

$$\frac{a_0}{b_0}, \quad \frac{a_1}{b_0}, \quad \frac{b_1}{b_0}.$$

Es giebt also ∞^3 projektive Transformationen der Geraden. Lösen wir die Gleichung (1) nach y_0 auf, so erhalten wir die *„inverse Transformation“*, welche den Punkt y wieder in den Punkt y_0 überführt. Sie hat die Form:

$$y_0 = \frac{A_1 y + A_0}{B_1 y + B_0}, \tag{2}$$

sie ist also wieder projektiv. Die A, B lassen sich aus den a und b leicht berechnen.

Wir denken uns jetzt die a und b als Funktionen eines einzigen Parameters x gegeben, dann werden auch die A und B bekannte Funktionen von x. Wir greifen so aus der Gesamtheit aller ∞^3 projektiven Transformationen eine einfach unendliche Schar heraus. Wir nehmen an, dafs für $x = 0$:

$$a_1 = 1, \quad a_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 1$$

wird. Dann erhält die Schar die identische Transformation; für $x = 0$ wird $y = y_0$. Betrachten wir y_0 als konstant, so wird y eine Funktion von x. *Wir fragen jetzt nach derjenigen Differentialgleichung, deren vollständige Lösung y ist,* wobei y_0 als Integrationskonstante fungiert. Wir erhalten aus (2) durch Differentiation:

$$(B_1 y + B_0)(A_1 y' + A'_1 y + A'_0) - (A_1 y + A_0)(B_1 y' + B'_1 y + B'_0) = 0,$$

wo die Accente Ableitungen nach x bedeuten. Vereinigen wir hier die gleichen Potenzen von y und y', so erhält die Differentialgleichung die Form:

$$\frac{dy}{dx} + X_0 \cdot y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{3}$$

wo die X Funktionen von x sind, die sich sehr einfach aus den A und B berechnen. Die Gleichung (3) ist aber (Nr. 697) *die allgemeine Riccatische.*

Ist umgekehrt irgend eine Differentialgleichung der Form (3) gegeben, so ist nach Nr. 697 das Doppelverhältnis von irgend 4 Lösungen y, y_1, y_2, y_3 konstant:

$$\frac{y - y_3}{y - y_1} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_1} = \text{const.}$$

Nehmen wir an, dafs die Koeffizienten X und die Lösungen y um $x = 0$ regulär sind, und bezeichnen mit y_0, y_1^0, y_2^0, y_3^0 ihre zu $x = 0$ gehörigen Anfangswerte, so folgt:

$$\frac{y - y_3}{y - y_1} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_1} = \frac{y_0 - y_3^0}{y_0 - y_1^0} : \frac{y_2^0 - y_3^0}{y_2^0 - y_1^0}.$$

Daraus ergiebt sich für y eine Gleichung der Form:

$$y = \frac{a_1 y_0 + a_0}{b_1 y_0 + b_0},$$

wo die a, b feste Funktionen von x, y_0 die der vollständigen Lösung entsprechende Anfangskonstante ist. Also entspricht

auch umgekehrt der allgemeinen Riccatischen Gleichung eine Lösung der Form (1). Wir fassen zusammen:

Satz I. Die allgemeine Riccatische Gleichung ist dadurch charakterisiert, dafs die vollständige Lösung mit ihrer Anfangskonstanten durch eine projektive Transformation verbunden ist. Die unabhängige Veränderliche der Differentialgleichung erscheint in der Transformation als Parameter.

Um eine Anwendung von diesem Satze zu machen, betrachten wir den Spezialfall, dafs in der projektiven Transformation (1) der Nenner sich auf 1 reduziert. Man nennt die entstehende Transformation:

$$y = a_1 y_0 + a_0 \tag{1'}$$

eine *lineare*. Alsdann ist auch die inverse Transformation:

$$y_0 = A_1 y + A_0 \tag{2'}$$

linear, man kann also in (2)

$$B_1 = 1, \quad B_0 = 0$$

setzen.

Alsdann wird aber in der Differentialgleichung (3)

$$X_0 = (A'_1 B_1 - A_1 B'_1) = 0,$$

sie wird also eine lineare (675):

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y + X_2 = 0. \tag{3'}$$

Umgekehrt ist nach Nr. 675 für die Lösungen jeder linearen Gleichung das Verhältnis:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \text{const.}$$

Man schliefst hieraus, wie oben, dafs y mit seiner Anfangskonstanten y_0 durch eine lineare Transformation der Form (1') verbunden ist. Also folgt:

Satz II. Die lineare Differentialgleichung ist dadurch charakterisiert, dafs die vollständige Lösung mit ihrer Anfangskonstanten durch eine lineare Transformation verbunden ist. Die unabhängige Veränderliche der Differentialgleichung erscheint in der Transformation als Parameter.

Wir fragen schliefslich nach der Form der infinitesimalen projektiven Transformation und bilden sie nach derselben Methode hier bei den Transformationen der Geraden, wie in Nr. 703 bei den Transformationen der Ebene. Wir gehen aus von einer „endlichen“ projektiven Transformation:

$$(4) \qquad y_1 = \frac{a_1 y + a_0}{b_1 y + b_0},$$

welche den Punkt y in den Punkt y_1 überführt. Für die a und b setzen wir Reihen, die nach Potenzen von t fortschreiten und sich für $t = 0$ auf die Parameterwerte der identischen Transformation reduzieren:

$$a_1 = 1 + \alpha_1 \cdot t + \cdots, \qquad b_1 = \beta_1 \cdot t + \cdots$$
$$a_0 = \alpha_0 \cdot t + \cdots, \qquad b_0 = 1 + \beta_0 \cdot t + \cdots$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (4) ein und entwickeln die rechte Seite wieder nach Potenzen von t, so kommt:

$$y_1 = \frac{y + (\alpha_1 y + \alpha_0) \cdot t + \cdots}{1 + (\beta_1 y + \beta_0) \cdot t + \cdots} = y + (-\beta_1 y^2 + (\alpha_1 - \beta_0) y + \alpha_0) \cdot t + \cdots$$

Schreiben wir wieder für t, δt, für y_1, $y + \delta y$ und brechen hinter den ersten Potenzen von δt ab, so erhalten wir die infinitesimale Transformation:

$$(5) \qquad \delta y = [-\beta_1 y^2 + (\alpha_1 - \beta_0) y + \alpha_0] \delta t,$$

welche den Punkt y auf der Geraden um das unendlich kleine Stück δy verschiebt. Diese Gleichung (5) geht aber in die Riccatische (3) über, wenn man schreibt:

$$\left(\begin{array}{l} \quad x, \ d, \ X_0, \quad X_1, \quad X_2 \\ \text{für } t, \ \delta, \ \beta_1, \ -\alpha_1 + \beta_0, \ -\alpha_0 \end{array}\right).$$

Das Wesentliche an dieser Buchstabenänderung ist hier nur, dafs die Koeffizienten X der allgemeinen Riccatischen Gleichung gleich *konstanten*, von t bezw. x unabhängigen Zahlen werden. Alles Übrige bedeutet nur eine unwesentliche Änderung der Schreibweise. Wir sehen also:

Satz III. Setzt man in der allgemeinen Riccatischen Gleichung die Koeffizienten X konstant, so entsteht die Gleichung der infinitesimalen projektiven Transformation. Dabei erscheint die unabhängige Veränderliche x der Differentialgleichung in

der Transformation als Parameter, die abhängige Veränderliche der Differentialgleichung als die Variabele, auf welche die Transformation ausgeübt wird.

Ist im besonderen die projektive Transformation (4), von der man ausgeht, eine lineare, so wird

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$

und daher

$$\beta_0 = \beta_1 = 0,$$

mithin auch

$$X_0 = 0.$$

Hieraus folgt zu Satz III der:

Zusatz. *Im besonderen ist die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Gleichung der infinitesimalen linearen Transformation.*

709. Die projektiven Transformationen der Ebene. Beziehen wir die Punkte einer Ebene in bekannter Weise auf ein System rechtwinkliger Koordinaten x, y, so sagt man, ein Punkt (x_0, y_0) der Ebene werde in einen anderen Punkt (x, y) derselben übergeführt durch eine projektive Transformation, wenn x und y rationale Funktionen ersten Grades von x und y mit demselben Nenner sind. Eine projektive Transformation der Ebene ist also definiert durch zwei Gleichungen der Form:

$$(1) \qquad x = \frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}, \quad y = \frac{b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3}{c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3}.$$

Die identische Transformation

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

entspricht den Werten der 9 „Parameter“:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 0, & a_3 &= 0, \\ b_1 &= 0, & b_2 &= 1, & b_3 &= 0, \\ c_1 &= 0, & c_2 &= 0, & c_3 &= 1. \end{aligned}$$

Die Transformation hängt nur von den 8 Verhältnissen dieser 9 Parameter ab.

Es giebt also ∞^8 projektive Transformationen der Geraden. Lösen wir die Gleichungen (1) nach x_0 und y_0 auf, so entsteht die *inverse Transformation*, welche den Punkt (x, y) wieder in den Punkt (x_0, y_0) zurückführt. Sie hat die Form:

$$(2) \qquad x_0 = \frac{A_1 x + A_2 y + A_3}{C_1 x + C_2 y + C_3}, \qquad y_0 = \frac{B_1 x + B_2 y + B_3}{C_1 x + C_2 y + C_3},$$

ist also wieder projektiv. Die A, B, C berechnen sich leicht aus den a, b, c.

Wir denken uns jetzt in (1) die a, b, c als Funktionen eines einzigen Parameters z gegeben, greifen also aus allen ∞^8 projektiven Transformationen eine Schar von ∞^1 heraus. Wir nehmen an, dafs die a, b, c durch um $z = 0$ reguläre Potenzreihen dargestellt werden, welche für $z = 0$ die Parameterwerte der identischen Transformation ergeben. Denken wir uns x_0 und y_0 als willkürliche Konstante, so werden in (1) x und y Funktionen von z, welche sich für $z = 0$ auf x_0 und y_0 reduzieren. Wir fragen jetzt nach demjenigen Differentialgleichungssysteme mit den Unbekannten x, y, für welches die Gleichungen (1) das vollständige Integral ergeben. Dieses entsteht, wenn wir die Gleichungen (2) nach z differentiieren. Es entstehen dann zwei lineare Gleichungen für $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$, welche, nach diesen beiden Gröfsen aufgelöst, die Form erhalten:

$$(3) \qquad \frac{dx}{dz} = -N \cdot x + L, \qquad \frac{dy}{dz} = -N \cdot y + M.$$

Dabei sind die L, M, N lineare Funktionen von x und y:

$$L = l_1 x + l_2 y + l_3,$$
$$M = m_1 x + m_2 y + m_3,$$
$$N = n_1 x + n_2 y + n_3;$$

die Koeffizienten sind Funktionen von z, die sich in leicht angebbarer Weise aus den A, B, C und ihren Ableitungen zusammensetzen. Die Ausrechnung möge dem Leser überlassen bleiben. Die Gleichungen (3) sind aber ein *Jacobisches System* (Nr. 701). Wir sehen also:

Das Jacobische System ist dadurch charakterisiert, dafs seine vollständigen Lösungen x, y mit ihren Anfangskonstanten x_0, y_0 durch eine projektive Transformation verknüpft sind. Die unabhängige Veränderliche z des Systems erscheint dabei als Parameter der Transformation.

Zeigen läfst sich nämlich, dafs auch umgekehrt jedes Jacobische System, dessen Koeffizienten irgend welche Funk-

tionen von z sind, durch ein Gleichungssystem der Form (1) integriert wird. Besonders einfach erkennt man dies, wenn man, wie in Nr. 702, homogene Variabele einführt, die überhaupt bei projektiven Betrachtungen sehr nützlich sind. Wir setzen also wieder:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}; \quad x_0 = \frac{x_1^0}{x_3^0}, \quad y_0 = \frac{x_2^0}{x_3^0}.$$

Alsdann kann man die zwei Gleichungen (1) in die drei spalten:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + a_3 x_3^0, \\ x_2 &= b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0 + b_3 x_3^0, \\ x_3 &= c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + c_3 x_3^0, \end{aligned}$$

indem man den auftretenden willkürlichen Proportionalitätsfaktor gleich 1 setzt. Schreiben wir ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 &= l_x, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= m_x, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 &= n_x, \end{aligned}$$

so erhält das Jacobische System (3) die Form:

$$x_3 \cdot \frac{dx_1}{dz} - x_1 \cdot \frac{dx_3}{dz} = -n_x \cdot x_1 + l_x \cdot x_3,$$

$$x_3 \frac{dx_2}{dz} - x_2 \frac{dx_3}{dz} = n_x \cdot x_2 + n_x \cdot x_3.$$

Hierin können wir über x_3 noch willkürlich verfügen, weil nur die Verhältnisse der x bestimmt sind. Wir wählen es so, daſs

$$\frac{dx_3}{dz} = n_x$$

wird, dann folgt aus unserem System, daſs von selbst

$$\frac{dx_1}{dz} = l_x, \quad \frac{dx_2}{dz} = m_x, \quad \frac{dx_3}{dz} = n_x$$

wird. Dieses ist aber ein System linearer, homogener Differentialgleichungen. Nehmen wir an, daſs in der Umgebung von $z = 0$ alle Koeffizienten in l_x, m_x, n_x sich regulär verhalten, so sind nach Kap. 5 die allgemeinen Integrale x_1, x_2, x_3 lineare homogene Funktionen ihrer Anfangswerte:

$$x_1 = a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + a_3 x_3^0$$
$$x_2 = b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0 + b_3 x_3^0$$
$$x_3 = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + c_3 x_3^0,$$

wo die a, b, c Funktionen von z sind. Gehen wir nun wieder zur nichthomogenen Darstellung über, indem wir die Gleichungen durcheinander dividieren, so entsteht gerade das System (1), hieraus folgt aber die Behauptung.

Wir fragen schliefslich noch nach der infinitesimalen projektiven Transformation der Ebene und ihrer allgemeinen analytischen Form. Setzen wir:

$$\begin{array}{llllll} a_1 = & 1 + \alpha_1 t + \cdots, & a_2 = & \alpha_2 t + \cdots & a_3 = & \alpha_3 t + \cdots \\ b_1 = & \beta_1 t + \cdots, & b_2 = & 1 + \beta_2 t + \cdots, & b_3 = & \beta_3 t + \cdots \\ c_1 = & \gamma_1 t + \cdots, & c_2 = & \gamma_2 t + \cdots, & c_3 = & 1 + \gamma_3 t + \cdots, \end{array}$$

und üben auf den Punkt x, y die Transformation (1) aus, so wird aus x

$$\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} = \frac{x + (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3) \cdot t + \cdots}{1 + (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3) \cdot t + \cdots} = x + [L - N \cdot x] \cdot t + \cdots$$

$$\frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} = \frac{y + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) \cdot t + \cdots}{1 + (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3) \cdot t + \cdots} = y + [M - N \cdot x] \cdot t + \cdots$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$L = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3,$$
$$M = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3,$$
$$N = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3.$$

Die α, β, γ sind Konstante. Die infinitesimale projektive Transformation wird also:

$$\delta x = (L - N \cdot x) \cdot \delta t$$
$$\delta y = (M - N \cdot y) \cdot \delta t,$$

und wir sehen:

Sind die Koeffizienten des Jacobischen Systems konstant, so definiert dieses die infinitesimale projektive Transformation der Ebene.

Nach einer in Nr. 701 bereits gemachten Bemerkung mufs die vollständige Integralgleichung der Jacobischen Gleichung in eine Identität übergehen, wenn man für x und y die vollständigen Lösungen des zugehörigen Jacobischen Systems einsetzt. Diese stellen aber nach den Ausführungen dieser Nummer projektive Transformationen, jene aber nach Nr. 702 die sogenannten *W-kurven* dar. Wir sehen also:

Die W-kurven sind dadurch charakterisiert, dafs sie bei projektiven Transformationen in sich übergehen.

§ 6. Differentialgleichungen, die auf Berührungstransformationen basieren.

710. Einige einfache integrabele Fälle. Während wir bisher nur solche Gleichungen betrachteten, in denen der Differentialquotient in erster Potenz enthalten ist, die also nach demselben aufgelöst sind, wollen wir nun einige Fälle behandeln, in denen man das gesuchte Integral finden kann, wiewohl die Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

nicht in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ linear ist. Wir behandeln zunächst die hierher gehörigen Integrationsmethoden rein formal, damit der Leser den Rechenmechanismus kennen lernt. Erst später führen wir den Begriff der Berührungstransformation an einem Beispiele ein und zeigen, dafs er uns den Grund erkennen läfst, warum wir bei den Beispielen dieses Paragraphen mit der auseinandergesetzten Methode zum Ziele kommen. Damit ist dann die Überschrift dieses Paragraphen nachträglich gerechtfertigt. Vorläufig wollen wir nur bemerken, dafs das Wesentliche im folgenden immer das ist, dafs y' als eine neue, selbständige Veränderliche betrachtet wird. Wir beginnen damit, einige einfache Fälle von integrabelen Differentialgleichungen aufzuzählen.

1. Wenn die Gleichung die Variabelen x und y nicht enthält, also von der Form ist:

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

so drückt sie aus, dafs

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

ist, wobei α einen konstanten Wert bedeutet, der zugleich eine Wurzel der Gleichung

$$F(\alpha) = 0$$

ist. Die Integration ergiebt:

$$y = \alpha x + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Hieraus folgt

$$\alpha = \frac{y - C}{x},$$

und folglich ist

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

die vollständige Integralgleichung.

2. Enthält die gegebene Gleichung die Variabele y nicht, so erfordert die Integration nur Quadraturen, sobald man die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst hat. Kann man diese Auflösung nicht ausführen, dagegen die Gleichung nach x auflösen, so läfst sich die Aufgabe gleichfalls auf Quadraturen bringen. Denn setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

also

$$dy = p\,dx,$$

und nimmt man an, dafs die Gleichung nach x aufgelöst die Form hat:

$$x = f(p),$$

so ist

$$dx = f'(p)\,dp,$$

also

$$dy = pf'(p)\,dp.$$

In dieser Gleichung sind die Variabelen y und p getrennt; es wird

$$y = \int pf'(p)\,dp + C.$$

Man hat demnach zwei Gleichungen, welche die Werte von x und y als Funktionen von p ausdrücken. Kann man nun p zwischen diesen Gleichungen eliminieren, so ist das

Integral durch eine einzige Gleichung zwischen x, y und C definiert.

3. Enthält die gegebene Gleichung die Variabele x nicht, und kann man sie nach y auflösen, so erhält man das Integral ebenfalls durch das nämliche Verfahren. Denn setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so ist:

$$y = f(p),$$

also

$$dy = f'(p)dp,$$

demnach

$$dx = \frac{1}{p}f'(p)dp;$$

und dies ergiebt:

$$x = \int \frac{1}{p}f'(p)dp + C.$$

Auch hier ist das gesuchte Integral durch zwei Gleichungen zwischen x, y, C und der Variabelen p ausgedrückt, die schliefslich noch zu eliminieren ist, um die eine Integralgleichung zu gewinnen.

4. Der zuletzt behandelte Fall ist enthalten unter denjenigen, bei welchen die vorgelegte Differentialgleichung nach der einen Variabelen y aufgelöst werden kann. Wir betrachten allgemein die Gleichung:

$$y = f(x, p), \tag{1}$$

wobei p wie früher die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ bedeutet; durch Differentiation erhält man:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \tag{2}$$

und dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p. Kann man die Integralgleichung derselben

$$\Phi(x, p, C) = 0 \tag{3}$$

bestimmen, so ergiebt die Elimination von p zwischen den Gleichungen (1) und (3) eine Gleichung:

$$F(x, y, C) = 0, \tag{4}$$

welche die vollständige Integralgleichung der ursprünglichen Differentialgleichung ist.

711. Die Clairautsche Gleichung. Clairaut hat eine Differentialgleichung betrachtet, die als spezieller Fall unter folgender allgemeinen Form enthalten ist:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{1}$$

Dabei ist

$$p = \frac{dy}{dx},$$

und $\varphi(p)$ und $\psi(p)$ bezeichnen gegebene Funktionen von p. Wir wenden nun auf die allgemeine Gleichung (1) das Verfahren an, welches im vorigen Paragraphen angegeben wurde; die Differentiation ergiebt:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \tag{2}$$

oder:

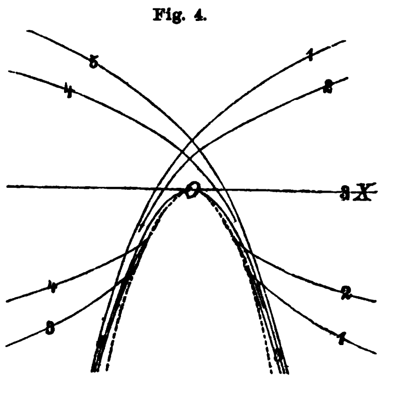
$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0. \tag{3}$$

Betrachten wir nun x als Funktion der unabhängigen Variabelen p, so ist diese Gleichung eine lineare, und ihre Lösung wird nach Nr. 675:

$$x = e^{-\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[C - \int_{p_0}^{p} e^{\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}dp\right]. \tag{4}$$

Sonach erhält man die Integralgleichung von (1), wenn man p zwischen den Gleichungen (1) und (4) eliminiert.

Fig. 4.



Man wird bemerken, daſs die in Nr. 669 betrachtete Differentialgleichung die Form (1) hat. Ihre vollständige Lösung war durch eine Schar von Kurven 4ter Ordnung gegeben. Die hier gelehrte Methode zeigt, daſs x und y rationale Funktionen eines Parameters, nämlich p, werden; denn man findet:

$$x = \frac{C - \frac{2}{3}p^3}{p^2}, \quad y = \frac{2C - \frac{1}{3}p^3}{p},$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2C + \frac{2}{3}p^3}{p^3}, \quad \frac{dy}{dp} = -\frac{2C + \frac{2}{3}p^3}{p^2}.$$

Die Kurve hat 3 Doppelpunkte, die den 3 Wurzeln der Gleichung

$$2C + \frac{2}{3}p^3 = 0,$$

für welche $\frac{dx}{dp}$ und $\frac{dy}{dp}$ gleichzeitig verschwinden, entsprechen. Von ihnen ist nur einer reell, die beiden anderen sind imaginär. Alle 3 liegen aber auf der Kurve

$$x = -p, \quad y = -p^2$$

oder

$$y = -x^2.$$

Diese war nach Nr. 669 Ort der Spitzen. Also wird der reelle Doppelpunkt jeder Integralkurve eine Spitze (vergl. Fig. 4).

Die Clairautsche Gleichung selbst entsteht aus (1) in dem Spezialfalle, dafs

$$\varphi(p) = p$$

ist. Dieser erfordert eine besondere Behandlung, weil dann die Gleichungen (3) und (4) illusorisch werden. Die Gleichung (1) wird alsdann:

$$y = px + \psi(p), \tag{5}$$

und die Gleichung (2), welche man durch Differentiation hieraus gewinnt, wird:

$$[x + \psi'(p)]dp = 0. \tag{6}$$

Also ist die neue Differentialgleichung:

$$dp = 0; \tag{7}$$

aufserdem kann aber auch

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{8}$$

gesetzt werden. Die Gleichung (7) ergiebt:

$$p = C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist; und substituiert man diesen Wert in die Gleichung (5), so folgt:

$$y = Cx + \psi(C) \tag{9}$$

als vollständige Lösung. Betrachtet man aber zweitens die Gleichung (8), und entnimmt man aus ihr den Wert p, um ihn in die Gleichung (5) zu substituieren, so erhält man eine Lösung der Differentialgleichung, die keine willkürliche Konstante enthält und die ihre singuläre Lösung bildet. Dieses Ergebnis stimmt mit der allgemeinen Theorie der singulären Lösungen, die wir im vorigen Kapitel entwickelt haben, überein. Denn die Gleichung (8) ist die Ableitung der Differentialgleichung in Bezug auf den Differentialquotienten

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Die Elimination von p mufs also das singuläre Integral liefern; auch sieht man, dafs die zur Elimination notwendige Rechnung identisch ist mit der Elimination von C zwischen dem vollständigen Integrale und seiner Ableitung nach C.

Die geometrische Bedeutung der Clairautschen Gleichung ist sehr einfach.

Die Differentialgleichung (5) repräsentiert eine einfach unendliche Schar von Geraden, mit dem variabelen Richtungskoeffizienten p. Ihre Integralkurven sind nun einmal alle diese Geraden selbst, sie stellen die *partikularen* Integrale vor. Sodann aber liefert auch die Einhüllende dieser Geraden ein Integral und zwar ein singuläres. Es wird einfach durch diejenige Kurve repräsentiert, deren Tangenten die Geraden der Schar sind.

An diese Bemerkungen schliefsen wir jetzt die Einführung der Berührungstransformationen an und betrachten zunächst:

712. Die Dualität als Berührungstransformation. Deuten wir (x, y) als rechtwinklige Koordinaten der Punkte einer Ebene E, (u, v) als die der Punkte einer Ebene E', so vermittelt die Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{1}$$

eine derartige Beziehung der beiden Ebenen, dafs jedem Punkte der Ebene E eine Gerade in der Ebene E' und um-

gekehrt entspricht. Man nennt diese durch die Gleichung (1) gegebene Beziehung eine *Dualität*.

Den Punkten einer Kurve C in der Ebene E entspricht eine Schar von Geraden in der Ebene E', die eine Kurve C' umhüllen. Man bezeichnet C' als das *Bild* der Kurve C. Wir nehmen an, daſs C keine Gerade ist. Die analytische Darstellung der Kurve C' gewinnt man, indem man aus der Gleichung der Kurve C:

$$y = f(x),$$

die als gegeben zu denken ist, den Wert von y in (1) einsetzt. Man erhält dann die Gleichung der Geradenschar in der Ebene E', die die gesuchte Kurve C' einhüllen. Dabei erscheint x als der Parameter der Schar. Nach Bd. I Nr. 210 findet man aber die Einhüllende durch Differentiation nach diesem Parameter. Versteht man daher unter

$$y' = f'(x)$$

die Ableitung von y nach x, so bestimmen die Gleichungen:

$$ux + vy + 1 = 0$$
$$u + vy' = 0$$

u und v als Funktionen des Parameters x und definieren so die Kurve C'. Man erhält:

$$(2) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{-y'}{xy' - y} \\[2ex] v = \dfrac{1}{xy' - y}. \end{cases}$$

Die Kurve C' hat natürlich die Geraden, deren Einhüllende sie ist, zu Tangenten; der Richtungskoeffizient einer Tangente ist $\frac{dv}{du}$, wofür wir kurz v' schreiben. Die Geraden der Schar aber sind durch die Gleichung (1) oder durch:

$$v = -\frac{x}{y} \cdot u - \frac{1}{y},$$

wo x als Parameter fungiert und

$$y = f(x)$$

zu setzen ist, gegeben. Ihr Richtungskoeffizient ist also $-\frac{x}{y}$, und wir haben also:

$$(3) \qquad v' = -\frac{x}{y}.$$

Analytisch bedeutet dies: Differentiiert man die Gleichungen (2) nach x und berechnet dann

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} : \frac{du}{dx}$$

durch Division, so hebt sich das rechter Hand vor der Division auftretende y'' heraus, und es wird der Quotient eine Funktion von x, y, y' allein, nämlich gleich $-\frac{x}{y}$. In der That giebt die direkte Ausrechnung:

$$\frac{du}{dx} = \frac{yy''}{(xy'-y)^2}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{xy''}{(xy'-y)^2}.$$

Die Gleichungen (2) ergeben zusammen mit der Gleichung (3) eine Transformation der *Linienelemente* (x, y, y') der Ebene E in die Linienelemente (u, v, v') der Ebene E' (vergl. Nr. 659). Zwei Kurven C und C' sind daher durch die Dualität (1) derart aufeinander bezogen, daſs den Linienelementen (x, y, y') der Kurve C die Linienelemente (u, v, v') der Kurve C' und umgekehrt entsprechen. Berühren sich zwei Kurven C_1 und C_2 der Ebene E im Punkte M, so ist das Linienelement der ersten Kurve mit dem der zweiten im Punkte M identisch. Also gilt Gleiches für die Bildkurven C'_1 und C'_2 der Ebene E'. Also berühren sich auch C'_1 und C'_2, und ihre gemeinsame Tangente ist die Bildgerade y' von M.

Eine Transformation der Linienelemente, welche zwei sich berührende Kurven wieder in zwei sich berührende überführt, heiſst aber eine *Berührungstransformation*. Wir können daher sagen:

Die Dualität ist eine Berührungstransformation.

Bestimmt wird die Dualität durch eine einzige Gleichung, nämlich (1). Diese wird daher auch ihre *aequatio directrix* genannt. Beachtet man, daſs diese sich nicht ändert, wenn man x mit u und y mit v vertauscht, so erkennt man, daſs die Auflösung der Gleichung (2) und (3) nach x, y, y' einfach

dadurch erhalten wird, daſs man x mit u, y mit v, y' mit v' vertauscht. Es transformieren daher die 3 Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{-v'}{uv'-v} \\ y = \dfrac{1}{uv'-v} \\ y' = -\dfrac{u}{v} \end{cases}$$

die Linienelemente von E' wieder zurück in die von E.

713. Zweites Beispiel einer Berührungstransformation. Im Anschluſs an die Betrachtungen der vorigen Nummer würde es keine Schwierigkeiten bieten, die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen entsprechend durchzuführen. Bleibt man in der Ebene, so tritt einfach an Stelle der Gleichung (1), die die Dualität definiert, irgend eine andere Gleichung zwischen x, y, u, v:

$$\Omega(x, y; u, v) = 0$$

als „aequatio directrix“.

Wir gehen auf die allgemeine Theorie hier nicht ein, sondern betrachten nur noch ein weiteres einfaches Beispiel; es bedeutet nur eine Modifikation der Dualität, die uns aber bald von Nutzen sein wird. In der Gleichung (1) der Dualität:

$$ux + vy + 1 = 0$$

führen wir nämlich statt u und v die Gröſsen ein:

$$(5)\qquad u_1 = -\frac{u}{v}, \quad v_1 = \frac{1}{v}.$$

Alsdann wird umgekehrt

$$(5')\qquad u = -\frac{u_1}{v_1}, \quad v = \frac{1}{v_1}$$

und daher:

$$(6)\qquad -u_1 x + y + v_1 = 0$$

die neue „aequatio directrix“, welche den Punkten der (x, y) Ebene wieder Gerade in der Ebene (u_1, v_1) zuordnet. Die entsprechende Beziehung der Linienelemente dieser beiden Ebenen ergiebt sich unmittelbar aus den bisherigen Gleichungen (2) bis (5'), wenn man noch

$$v'_1 = \frac{dv_1}{du_1}$$

aus:

$$v'_1 = + \frac{v'}{v - uv'}$$

und umgekehrt v' aus:

$$v' = + \frac{v'_1}{v_1 - u_1 v'_1}$$

berechnet. Es entstehen so die Gleichungen:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} u_1 = y' \\ v_1 = xy' - y \\ v'_1 = x \end{cases}$$

und

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} x = v'_1 \\ y = u_1 v'_1 - v_1 \\ y' = u_1. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, dafs den Linienelementen der Ebene (u_1, v_1), deren Punkte auf einer Parallelen $u_1 =$ const. zur v_1-Achse liegen, diejenigen Linienelemente der Ebene (x, y) zugeordnet werden, deren Geraden einer festen Richtung $y' =$ const. parallel sind. Die in dieser Nummer eingeführte Modifikation der Dualität möge im folgenden einfach „die Berührungstransformation D_1“ genannt werden.

714. Anwendung auf Differentialgleichungen. Bereits in Nr. 659 wurde auseinandergesetzt, wie eine Differentialgleichung

$$\text{(9)} \qquad f(x, y, y') = 0$$

aus allen ∞^3 Linienelementen (x, y, y') der Ebene eine Schar von ∞^2 herausgreift. Das Integrationsproblem besteht darin, diese ∞^2 Linienelemente zu einer Schar von ∞^1 Integralkurven zusammenzufassen, längs deren jeder wieder ∞^1 Linienelemente aneinander gereiht sind. Führen wir nun auf eine Differentialgleichung die duale Berührungstransformation — oder besser gleich die Transformation D_1 — aus, so geht diese wieder in eine Differentialgleichung über:

$$\text{(10)} \qquad \varphi(u_1, v_1, v'_1) = 0.$$

Ist

$$\text{(11)} \qquad F(x, y, C) = 0$$

die Integralgleichung von (9), so kann man in ihr nach (8) die (x, y, y') durch (u_1, v_1, v'_1) ersetzen. Das Eliminationsresultat von v'_1 aus dieser Gleichung und (10) liefert dann die Integralgleichung

$$(12) \qquad \varphi_1(u_1, v_1, C) = 0$$

von (10).

Kann man also eine der Gleichungen (9) oder (10) durch Quadraturen integrieren, so ist dies auch bei den anderen möglich. Im besonderen heben wir den Typus heraus, daſs (9) in Bezug auf x und y linear ist. Die Gleichungen (8) lehren, daſs dann (10) in v_1 und v'_1 linear, also durch Quadraturen nach Nr. 675 integrierbar ist. In diesem Falle hat (9) die Form:

$$(13) \qquad y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

der Nr. 711, und die Gleichung (10) wird:

$$(14) \qquad [u_1 - \varphi(u_1)]v'_1 - v_1 - \psi(u_1) = 0.$$

In der That haben wir in Nr. 711 die Gleichung (13) durch Quadraturen integriert und auf eine lineare Differentialgleichung zurückgeführt.

Den Grund dafür sehen wir jetzt darin, *daſs wir jede Differentialgleichung integrieren können, die wir durch eine Berührungstransformation auf einen bereits erledigten Fall zurückführen können.*

Beispielsweise wird auch die allgemeinere Gleichung:

$$y - x\varphi(y') - (xy' - y)^n\psi(y')$$

nach derselben Methode auf Quadraturen zurückgeführt. Die Berührungstransformation D_1 führt sie über in die Gleichung:

$$u_1 v'_1 - v_1 - v'_1\varphi(u_1) - v_1^n \cdot \psi(u_1) = 0,$$

die dem in Nr. 678 erledigten Typus angehört.

Wir brechen hier unsere Betrachtungen über Berührungstransformationen ab und geben zum Schlusse noch einige Anwendungen der in Nr. 710 ff. auseinandergesetzten Integrationsmethoden auf geometrische Probleme, die auf Differentialgleichungen von dem hier betrachteten Typus führen.

715. Erste Anwendung. *Zwei Punkte F und F' mit dem Abstande $2c$ sind gegeben; man soll eine Kurve bestimmen, so dafs das Produkt der Entfernungen dieser beiden Punkte von jeder Tangente gleich einer gegebenen Gröfse b^2 ist.*

Fig. 7.

Die Gerade FF' wählen wir zur x-Achse und legen die y-Achse senkrecht durch die Mitte 0 der Strecke $2c$. Setzen wir

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so wird die Gleichung der Tangente in einem Punkt x, y der gesuchten Kurve:

$$\eta - y = p(\xi - x).$$

Die Entfernungen FH, $F'H'$ dieser Tangente von den Punkten F und F' haben die Werte:

$$FH = \frac{y - px + pc}{\sqrt{1+p^2}}, \quad F'H' = \frac{y - px - pc}{\sqrt{1+p^2}};$$

also wird die Gleichung des Problemes:

$$\frac{(y-px)^2 - p^2c^2}{1+p^2} = \pm b^2$$

oder, wenn man $a^2 = c^2 \pm b^2$ setzt:

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung wird nach Nr. 711:

$$y = Cx + \sqrt{a^2C^2 \pm b^2},$$

es stellt gerade Linien dar; die eigentliche Lösung des geometrischen Problems ist aber durch das singuläre Integral der Differentialgleichung gegeben, für welches

$$x + \frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}} = 0$$

oder

$$x = -\frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}}$$

wird; trägt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so erhält man:

$$y = \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}},$$

und die Elimination von C ergiebt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

also eine Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte F und F' sind.

716. Zweite Anwendung. *Es sind zwei parallele Geraden und auf jeder ein fester Punkt gegeben; man soll die Kurve bestimmen, deren Tangenten auf den gegebenen Parallelen Abschnitte, gerechnet von den festen Punkten an, bestimmen, deren Produkt gleich einer gegebenen Gröfse ist.*

Es seien AP, $A'P'$ die gegebenen Geraden, A und A' die gegebenen Punkte auf denselben (Figur in Nr. 715); zur x-Achse wählen wir die Gerade AA', und zur y-Achse eine Parallele zu den Geraden AP, $A'P'$, gelegt durch die Mitte O der Strecke AA'. Dieses Koordinatensystem braucht also kein rechtwinkliges zu sein. Die Tangente der gesuchten Kurve hat die Gleichung:

$$\eta - y = p(\xi - x),$$

und wenn man mit $2a$ die Entfernung AA' bezeichnet, so erhalten die Strecken AP, $A'P'$ zwischen den Punkten A, A' und der Tangente die Werte:

$$\pm AP = y - px + pa, \quad \pm A'P' = y - px - pa;$$

also wird die Differentialgleichung des Problemes:

$$(y - px)^2 - a^2p^2 = \pm b^2$$

oder:

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}.$$

Man erkennt, dafs dieses die nämliche Gleichung wie vorhin ist; die eigentliche Lösung wird hier ebenso das singuläre Integral:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es stellt eine Ellipse oder Hyperbel dar, die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogen ist.

717. Dritte Anwendung. *Es soll die Kurve bestimmt werden, für welche der Abschnitt ihrer Tangente zwischen zwei rechtwinkligen Achsen stets einer gegebenen Gröfse gleich ist.*

Fig. 8.

Es seien T und S die Punkte, in denen die Tangente der gesuchten Kurve die gegebenen Geraden schneidet; hat man diese zu Koordinatenachsen gewählt, so ist die Gleichung der Tangente:

$$\eta - y = p(\xi - x),$$

und es wird:

$$\pm OS = y - px, \quad \pm OT = -\frac{y-px}{p}.$$

Also wird die Differentialgleichung:

$$(y - px)^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = a^2$$

oder:

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{1}$$

Wie in den vorigen beiden Problemen erhält man das vollständige Integral, indem man p durch eine Konstante ersetzt, und das singuläre, welches die gesuchte Kurve liefert, wenn man p aus der Differentialgleichung und ihrer Ableitung nach p, nämlich

$$0 = x + \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

eliminiert. Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Erhebt man diese Gleichungen auf die Potenz $\frac{2}{3}$ und addiert sie dann, so bekommt man die Gleichung:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Dieselbe stellt eine Epicykloide dar, welche von einem Kreise mit dem Radius $\frac{a}{4}$ erzeugt wird, der im Innern des Kreises mit dem Radius a rollt.

Dieses Resultat läſst sich auch sehr einfach vermittelst geometrischer Betrachtungen ableiten. Denn konstruieren wir über OS und OT das Rechteck $OSKT$, ziehen wir ferner die Gerade OK, welche ST in H schneidet, und beschreiben wir den Kreis AKB um den Punkt O als Mittelpunkt mit dem Radius a, sowie den Kreis O' über HK als Durchmesser, welcher die Gerade ST noch im Punkte M schneidet, so ist der Winkel KHT doppelt so groſs wie KOA und halb so groſs wie $KO'M$; dieser letztere ist also das Vierfache des Winkels KOA; andererseits ist der Radius $O'K$ der vierte Teil vom Radius OK; also sind die beiden Kreisbogen KM und KA untereinander gleich. Hieraus folgt, daſs der Ort des Punktes M eine Epicykloide ist, deren Anfangspunkt A ist. Wir wissen aber, daſs MH oder ST die Tangente an diese Epicykloide ist, die also die Einhüllende der beweglichen Geraden ST wird.

Drittes Kapitel.

Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen.

---

§ 1. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

718. Definitionen. Wir betrachten nun ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabelen $x, y_1, y_2 \dots y_{n-1}, y_n$, nämlich:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2 \dots y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2 \dots y_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2 \dots y_n). \end{cases}$$

Hat man ein System von n Funktionen gefunden:

$$(2)\qquad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots \quad y_n = \varphi_n(x),$$

welches die Gleichungen (1) identisch befriedigt, so nennt man dies eine *Lösung*. Enthält diese n willkürliche Konstante

$$C_1, \quad C_2, \dots C_n,$$

die sich nicht etwa auf weniger als n reduzieren — was z. B. der Fall wäre, wenn alle Konstanten nur in der Verbindung

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

aufträten, die als eine einzige Konstante zählte —, so heißt die Lösung eine *vollständige*. Spezialisiert man die Konstanten in einer vollständigen Lösung zu festen Werten, so entsteht eine *partikulare* Lösung. Eine Lösung, die durch solche Spezialisierung der Konstanten aus der vollständigen nicht gewonnen werden kann, heißt eine *singuläre* Lösung.

Differentiiert man irgend eine Gleichung zwischen x und den y:

$$\varphi(x, y_1, y_2, \dots y_n) = 0$$

nach x, indem man für die $\frac{dy_i}{dx}$ ihre Werte aus (2) einsetzt, so kann es eintreten, daſs die entsprechende Gleichung durch alle Wertsysteme x, y befriedigt wird, welche der Gleichung $\varphi = 0$ genügen. Man sagt dann, die Gleichung $\varphi = 0$ „erfüllt" das System (1), oder, sie ist eine *Integralgleichung* von diesem.

Im besonderen kann es eintreten, daſs eine vollständige Lösung nicht durch ein System der Form (2), sondern implicite durch ein System von n verschiedenen Integralgleichungen gegeben ist:

$$(3)\quad \varphi_1(x, y_1, \dots y_n, C_1, \dots C_n) = 0, \dots \varphi_n(x, y_1 \dots y_n, C_1 \dots C_n) = 0,$$

das ebenso wie die vollständige Lösung n wesentliche, willkürliche Konstante enthält. Ein solches System heiſst ein *vollständiges System von Integralgleichungen.* Eine Gleichung, die sich aus den Gleichungen eines solchen Systems durch Eliminationen und Spezialisierung der Konstanten ableiten läſst, heiſst eine *partikulare* Integralgleichung. Ist dies nicht der Fall, so heiſst sie *singulär.*

Erscheint das vollständige System (3) nach den willkürlichen Konstanten aufgelöst in der Form:

$$(4)\qquad \psi_1(x, y_1, \dots y_n) = C_1, \dots \quad \psi_n(x, y_1 \dots y_n) = C_n,$$

so heiſst jede dieser Gleichungen *ein Integral* und zwar ein partikulares, wenn die Konstante auf der rechten Seite einen speziellen Wert hat. Der Ausdruck *singuläres Integral* erklärt sich wohl von selbst.

Wir gehen jetzt daran, die Existenz der vollständigen Lösungen und der vollständigen Integrale zu erweisen.

719. Das Existenztheorem für das nach den Ableitungen aufgelöste System. Es gilt der:

Satz. *In dem Systeme von Differentialgleichungen:*

$$(1)\qquad y'_1 = f_1(x, y_1, y_2 \dots y_n), \dots \quad y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n)$$

seien die rechten Seiten analytische Funktionen ihrer Argumente, die sich in der Umgebung der Stelle

$$x = x_0, \quad y_1 = b_1, \dots y_n = b_n$$

regulär verhalten. Alsdann giebt es immer eine partikulare Lösung:

$$(2) \qquad y_1 = \varphi_1(x, b_1, b_2, \ldots b_n), \ldots \quad y_n = \varphi_n(x, b_1, b_2, \ldots b_n),$$

wo

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

analytische Funktionen von x sind, die sich in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ regulär verhalten und für $x = x_0$ selbst entsprechend die Werte

$$b_1, \quad b_2, \ldots b_n$$

annehmen.

Die Funktionen f mögen sich regulär verhalten für alle Werte

$$x, \quad y_1, \quad y_2, \ldots y_n,$$

die den Ungleichungen:

$$|x - x_0| < R, \; |y_1 - b_1| < R_1, \ldots |y_n - b_n| < R_n$$

genügen.

Mit M_1, $M_2, \ldots$ bezeichnen wir die größten absoluten Beträge, welche die Funktionen f_1, $f_2, \ldots$ in dieser Umgebung annehmen; wir setzen ferner:

$$\psi(x, \eta_1, \eta_2, \ldots) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)\left(1 - \frac{\eta_1 - b_1}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\eta_2 - b_2}{R_2}\right)\cdots}$$

und betrachten die n simultanen Gleichungen:

$$(1\text{a}) \quad \frac{d\eta_1}{dx} = M_1 \psi(x, \eta_1, \eta_2, \ldots), \quad \frac{d\eta_2}{dx} = M_2 \psi(x, \eta_1, \eta_2, \ldots), \ldots$$

Man kann dann Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ermitteln, die diesen Differentialgleichungen genügen und sich zugleich für $x = x_0$ bezüglich auf die Werte b_1, $b_2, \ldots$ reduzieren. Setzt man nämlich:

$$(3) \qquad \eta_1 - b_1 = M_1 S, \quad \eta_2 - b_2 = M_2 S, \ldots$$

und bestimmt man die Funktion S derart, daſs sie für $x = x_0$ verschwindet, und die Gleichung erfüllt:

$$(4) \qquad \frac{dS}{dx} = \psi(x, b_1 + M_1 S, \quad b_2 + M_2 S, \ldots),$$

so ist ersichtlich, daſs die Gleichungen (1a) identische werden. Die Gleichung (4) läſst sich in folgender Form schreiben:

$$\left(1-\frac{M_1 S}{R_1}\right)\left(1-\frac{M_2 S}{R_2}\right)\cdots\frac{dS}{dx}-\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{R}}=0,$$

oder:

$$\left[1-\left(\frac{M_1}{R_1}+\frac{M_2}{R_2}+\cdots\right)S+\left(\frac{M_1 M_2}{R_1 R_2}+\cdots\right)S^2-\cdots\right]\frac{dS}{dx}-\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{R}}=0,$$

und man erhält dieselbe durch Differentiation der folgenden:

$$(5)\left[S-\left(\frac{M_1}{R_1}+\frac{M_2}{R_2}+\cdots\right)\frac{S^2}{2}+\left(\frac{M_1 M_2}{R_1 R_2}+\cdots\right)\frac{S^3}{3}-\cdots\right]+Rl\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)=0.$$

Sei $r<R$ und kleiner als der kleinste Wert, welcher $|x-x_0|$ zu erteilen ist, damit die Gleichung für S zwei gleiche Wurzeln bekommt. Solange $|x-x_0|$ kleiner als r bleibt, ist diejenige der Wurzeln S, welche für $x=x_0$ verschwindet, eine stetige Funktion von x, die in eine konvergente Reihe nach ganzen Potenzen von $x-x_0$ entwickelbar ist. Bezeichnet man nun weiter mit A den größten Betrag dieser Funktion S für $|x-x_0|<r$, so ist (Nr. 660):

$$(6)\qquad \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n S}{dx^n}\right)_0<\frac{A}{r^n}.$$

Endlich erkennt man, daß auch die Funktionen η_1-b_1, $\eta_2-b_2,\ldots$, da sie proportional zu S sind, ebenso wie diese Funktion sich in konvergente Reihen nach Potenzen von $x-x_0$ entwickeln lassen.

Nach Nr. 656 sind die Beträge der partiellen Ableitungen der Funktionen

$$f_1(x, y_1\ldots y_n),\quad f_2(x, y_1\ldots y_n),\ldots$$

für

$$x=x_0,\quad y_1=b_1,\quad y_2=b_2,\ldots$$

nicht größer als die Werte der entsprechenden Ableitungen der Funktionen

$$M_1\varphi(x, \eta_1, \eta_2,\ldots),\quad M_2\varphi(x, \eta_1, \eta_2,\ldots),\ldots$$

für

$$x=x_0,\quad \eta_1=b_1,\quad \eta_2=b_2,\ldots$$

Daraus folgt, indem man das System der Gleichungen (1) und der durch Differentiation aus diesen abgeleiteten mit den Gleichungen (1a) und ihren Ableitungen vergleicht, daß die Werte:

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0,\quad \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_0,\cdots\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0,\quad \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right)_0,\ldots,$$

welche aus den ersten Gleichungen berechnet werden, ihrem Betrage nach nicht gröſser sind als die reellen und positiven Werte:

$$\left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2\eta_1}{dx^2}\right)_0, \cdots \quad \left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2\eta_2}{dx^2}\right)_0, \ldots,$$

gebildet aus dem zweiten Systeme. Also ist, gemäſs den Gleichungen (3) und der Ungleichung (6):

$$\left|\left(\frac{d^n y_1}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{n!}\right| < M_1 A \cdot \frac{|x-x_0|^n}{r},$$

$$\left|\left(\frac{d^n y_2}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{n!}\right| < M_2 A \cdot \frac{|x-x_0|^n}{r},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Demnach sind die Reihen:

$$y_1 = b_1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 \frac{x-x_0}{1!} + \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots,$$

$$y_2 = b_2 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0 \frac{x-x_0}{1!} + \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

konvergent, solange $|x-x_0| < r$ ist. Diese Reihen definieren also analytische Funktionen $y_1, y_2, \ldots$, welche innerhalb dieses Gebietes regulär sind, und dieselbe Überlegung, welche in Nr. 660 ausgeführt wurde, beweist, daſs diese Funktionen in der That den Differentialgleichungen genügen.

Bemerkung. Es ist leicht zu erkennen, daſs man in dem vorigen Beweise die Gröſsen $R_1, R_2, \ldots$ durch den kleinsten Wert unter ihnen $\mathfrak{R}$, und die Maxima $M_1, M_2, \ldots$ durch den gröſsten Wert unter ihnen $\mathfrak{M}$ ersetzen kann. Die Gleichungen (4) und (5) werden dann:

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} S\right)^n \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x-x_0}{R}} = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{R}}{(n+1)\mathfrak{M}}\left[1 - \left(1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} S\right)^{n+1}\right] + Rl\left(1 - \frac{x-x_0}{R}\right) = 0.$$

Die Ableitung dieser Gleichung in Bezug auf S ergiebt:

$$1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} S = 0.$$

Es ist also für den Fall zweier gleicher Wurzeln:

$$\frac{\mathfrak{R}}{(n+1)\mathfrak{M}} + Rl\left(1 - \frac{x-x_0}{R}\right) = 0,$$

also:

$$x - x_0 = R\left(1 - e^{-\frac{\mathfrak{R}}{(n+1)\mathfrak{M}R}}\right),$$

und folglich kann man für r die obere Grenze fixieren:

$$r = R\left(1 - e^{-\frac{\mathfrak{R}}{(n+1)\mathfrak{M}R}}\right).$$

720. Implicite Funktionen von einer Variabelen. Das Existenztheorem für die Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen können wir nun benützen, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz. *Es seien*

$$F_1(x, y_1 \dots y_n), \quad F_2(x, y_1 \dots y_n), \quad F_n(x, y_1 \dots y_n)$$

analytische Funktionen ihrer $n+1$ Argumente, die sich in der Umgebung der Stelle

$$(x_0, b_1 \dots b_n)$$

regulär verhalten; an dieser Stelle sei

$$F_1 = F_2 \dots = F_n = 0,$$

während die Funktionaldeterminante

$$(1) \qquad \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Alsdann giebt es ein und nur ein System von analytischen Funktionen $y_1 \dots y_n$, welche sich für $x = x_0$ auf $b_1 \dots b_n$ reduzieren, das System

$$F_1 = 0, \dots F_n = 0$$

erfüllen und sich in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ regulär verhalten.

In betreff der Fassung von diesem Satze bemerken wir nur, dafs der Begriff der „Funktionaldeterminante“ durch den

Wortlaut selbst erklärt ist und später (Nr. 724, 725) genauer untersucht werden wird. Das Zeichen

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots F_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots y_n)}$$

bedeutet nur eine abkürzende symbolische Schreibweise dieser Determinante.

Den Beweis dieses Satzes, auf welchen wir zuerst in Nr. 56 hingewiesen haben, können wir jetzt leicht erbringen.

Die gesuchten Funktionen müssen nämlich das Gleichungssystem

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} y'_1 \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} y'_n = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\partial F_n}{\partial x} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} y'_1 \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} y'_n = 0 \end{aligned}$$

erfüllen, welches sich, da die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, auflösen läſst und Gleichungen von der Form

$$(3)\qquad y'_k = f_k(x, y_1 \dots y_n), \quad (k = 1 \dots n)$$

ergiebt. Diese eindeutig bestimmten Gleichungen haben nach Nr. 719 ein bestimmtes System von analytischen Funktionen, welche sich für $x = x_0$ bez. auf $b_1 \dots b_n$ reduzieren als Lösungen. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

721. Implicite Funktionen von mehreren Variabelen. Wie wir in Nr. 662 aus der Existenz der durch eine Gleichung definierten Funktion *einer* Variabelen die einer durch eine Gleichung definierten impliciten Funktion von mehreren Variabelen gefolgert hatten, so können wir jetzt mit Hilfe von Nr. 720 den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Es seien*

$$F_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n), F_2(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) \dots, F_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$$

analytische Funktionen ihrer $m + n$ *Argumente, die sich in der Umgebung der Stelle*

$$a_1 \dots a_m, \quad b_1 \dots b_n$$

regulär verhalten, an diesen Stellen sei auſserdem

$$F_1 = F_2 \cdots = F_n = 0,$$

während die Funktionaldeterminante

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F_1 \ldots F_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)}$$

an dieser Stelle nicht verschwindet. Alsdann giebt es ein und nur ein System von Funktionen $y_1 \ldots y_n$, *welche die Gleichungen erfüllen, für* $x_i = a_i$ *sich auf* $y_k = b_k$ *reduzieren und sich in der Umgebung von* $x_i = a_i$ *regulär verhalten.*

Zum Beweise setzen wir:

$$(2) \qquad x_i = a_i + \alpha_i x$$

und erhalten durch diese Substitutionen an Stelle des ursprünglichen Gleichungssystems das folgende:

$$(3) \quad F_k(a_1 + \alpha_1 x \ldots a_m + \alpha_m x,\ y_1 \ldots y_n) = F_k(x,\ y_1 \ldots y_n) = 0.$$

Nun wissen wir aber aus Nr. 720, dafs es von diesem System von Gleichungen ein einziges System von Lösungen giebt, welches die gestellten Bedingungen erfüllt. Diese Lösungen sind analytische Funktionen von x, welche nach ganzen Potenzen von $\alpha_i x$ fortschreiten und etwa für $|x| < R$ konvergieren. Der Koeffizient der n^{ten} Potenz von x wird dabei (Nr. 138) eine Form n^{ten} Grades der α_i. Ersetzt man also jetzt wieder $\alpha_i x$ durch $x_i - a_i$, so entsteht eine Potenzreihe in

$$x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n,$$

die für

$$|x_i - a_i| < R_i = \alpha_i R$$

konvergiert und das gesuchte System von Lösungen darstellt.

722. Das Existenztheorem für das allgemeine System erster Ordnung.

Satz. *Es seien*

$$F_1(x,\ y_1 \ldots y_n,\ y'_1 \ldots y'_n),\quad F_2(x,\ y \ldots y_n,\ y'_1 \ldots y'_n), \ldots$$
$$\ldots F_n(x,\ y_1 \ldots y_n,\ y'_1 \ldots y'_n)$$

analytische Funktionen ihrer $2n+1$ *Argumente, welche sich in der Umgebung der Stelle*

$$x_0,\ b_1 \ldots b_n,\ c_1 \ldots c_n$$

regulär verhalten. An derselben Stelle sei

$$F_1 = 0, \ldots F_n = 0,$$

während die Funktionaldeterminante

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y'_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y'_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y'_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y'_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F_1 \ldots F_n)}{\partial(y'_1 \ldots y'_n)}$$

an dieser Stelle nicht verschwindet. Alsdann giebt es ein bestimmtes System von analytischen Funktionen

$$(2) \qquad y_k = \varphi_k(x, b_1, b_2, \ldots b_n),$$

welches sich für $x = x_0$ auf $y_k = b_k$ reduziert, die Differentialgleichungen erfüllt und sich in der Umgebung von $x = x_0$ regulär verhält.

Den Beweis, welcher genau wie in Nr. 663 zu führen ist, wollen wir hier nur skizzieren und die Ausführung dem Leser überlassen. Man kann nach Nr. 721 die impliciten Differentialgleichungen ersetzen durch explicite, indem man nach den y'_k auflöst. Auf die expliciten aber wendet man sodann das Existenztheorem aus Nr. 719 an.

§ 2. Die Integralgleichungen eines Systems erster Ordnung.

723. Vollständige Systeme von Integralen. Wir betrachten jetzt ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung, das nach den Differentialquotienten aufgelöst ist, und gestatten uns in diesem Paragraphen eine Änderung der Bezeichnungsweise, indem wir die abhängigen Veränderlichen mit

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \quad \text{statt mit} \quad y_1, y_2, \ldots y_n$$

bezeichnen. Wir sehen aber durchweg die Bedingungen, unter denen im vorigen Paragraphen die Existenz der Lösungen bewiesen wurde, als erfüllt an. Wir schreiben das System in der Form:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \ldots, \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}.$$

Man kann diese in einer einzigen Formel zusammenfassen, nämlich:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Wir nehmen nun an, wir hätten ein System von n Integralen gefunden:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Psi_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = C_1, \\ \Psi_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = C_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ \Psi_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = C_n, \end{cases}$$

mit den willkürlichen Konstanten

$$C_1, \quad C_2, \ldots C_n.$$

Wir nennen ein solches System ein vollständiges System von Integralen, wenn es sich nach

$$x_1, \, x_2, \ldots x_n$$

auflösen läfst, also eine vollständige Lösung definiert.

Dafs ein solches System existiert, folgt unmittelbar aus den Sätzen des § 2 von Kap. VI dieses Bandes. Denn die in Nr. 719 ermittelte vollständige Lösung:

$$x_1 = b_1 + \left(\frac{dx_1}{dx}\right)_0 \cdot (x - x_0) + \cdots,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$
$$x_n = b_n + \left(\frac{dx_n}{dx}\right)_0 \cdot (x - x_0) + \cdots$$

ist analytisch in den willkürlichen Konstanten

$$b_1, \quad b_2, \ldots b_n$$

und kann nach ihnen aufgelöst werden, weil die Determinante

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial(b_1, b_2, \ldots b_n)}$$

an der Stelle $x = x_0$ den Wert 1 hat, also auch in der Umgebung dieser Stelle nicht verschwindet, so dafs der Satz der Nr. 720 anwendbar ist. Durch diese Auflösung entsteht also thatsächlich ein System von der Form (2). Als willkürliche Konstanten erscheinen dabei auf den rechten Seiten

$$b_1, \quad b_2, \ldots b_n.$$

Da diese innerhalb der Voraussetzungen unseres Existenztheorems willkürlich sind, so können sie ihrerseits als unabhängige Variabele betrachtet werden. Die Funktionen Ψ des Systems (2), das wir so erhalten haben, sind daher in dem Sinne *voneinander unabhängig*, dafs keines der Ψ eine Funktion der übrigen Ψ allein, also z. B. nicht etwa

$$\Psi_n = \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots + \Psi_{n-1}$$

ist. Wir können also sagen:

Unser System (1) *besitzt immer ein vollständiges System von n voneinander unabhängigen Integralen.*

Sei nun (2) ein solches System, alsdann werden die Gleichungen:

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dx} = 0, \ldots, \quad \frac{d\Psi_n}{dx} = 0 \tag{3}$$

zu Identitäten, wenn man für

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$$

ihre Werte aus (1) einsetzt. Bildet man daher eine willkürliche Funktion Π von

$$\Psi_1, \ \Psi_2, \ldots \Psi_n,$$

so wird $\Pi = \text{const.}$ wieder ein Integral. In der That wird

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Psi_1} \cdot \frac{d\Psi_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \Psi_n} \cdot \frac{d\Psi_n}{dx}$$

nach (3) identisch null, wenn man für

$$\frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$$

ihre Werte aus (1) einsetzt. Man kann aber auch umgekehrt sagen:

Ist (2) *ein vollständiges System unabhängiger Integrale und*

$$\Pi(x, x_1, \ldots x_n) = \text{const.} \tag{4}$$

irgend ein anderes Integral, so ist Π eine Funktion von

$$\Psi_1, \ \Psi_2, \ldots \Psi_n$$

allein.

In der That, da (2) ein vollständiges System von Integralen darstellen soll, so kann man auch umgekehrt

$$x_1, \quad x_2, \ldots x_n$$

als Funktionen von x und

$$\Psi_1, \quad \Psi_2, \ldots \Psi_n$$

betrachten. Die Gleichung (4) geht dann über in eine Gleichung zwischen

$$x, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2, \ldots \Psi_n,$$

die mit

$$F(x, \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n) = \Gamma$$

bezeichnet werde. Die Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \Psi_1}\frac{d\Psi_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_n}\frac{d\Psi_n}{dx} = 0.$$

Da diese Gleichung, weil F ein Integral ist, durch das System identisch befriedigt sein mufs, und da zufolge der Gleichungen (3)

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = \frac{d\Psi_2}{dx} = \cdots = \frac{d\Psi_n}{dx} = 0$$

wird, so folgt, dafs:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

sein mufs. Dies besagt, dafs die Funktion F unabhängig von x, d. h. als eine Funktion von $\Psi_1, \ldots \Psi_n$ darstellbar ist. Es giebt also für das System (1) nur n verschiedene, oder was dasselbe ausdrückt, voneinander unabhängige Integrale.

724. Die Determinante zweier Funktionen. Der Begriff der Unabhängigkeit zweier Funktionen von zwei Variabelen, oder allgemein mehrerer Funktionen von mehreren Variabelen ist von Jacobi aufgestellt und in folgender Weise begründet worden.

Sind

$$u_1 = f_1(x_1, x_2), \quad u_2 = f_2(x_1, x_2)$$

zwei Funktionen der beiden Variabelen x_1 und x_2, so heifsen diese beiden Funktionen voneinander unabhängig, wenn es möglich ist, aus diesen beiden Gleichungen die Variabelen x_1 und x_2 umgekehrt als Funktionen u_1 und von u_2 darzustellen; dagegen sind die beiden Funktionen abhängig voneinander,

wenn die Elimination einer Variabelen zwischen diesen beiden Gleichungen zugleich die Elimination der anderen Variabelen herbeiführt, so daſs also eine Gleichung von der Form:

$$\varphi(u_1, u_2) = 0 \tag{1}$$

oder, was dasselbe besagt, von der Form:

$$u_2 = \varphi(u_1) \tag{2}$$

besteht.

Besteht solch eine Funktionalgleichung, so verschwindet die Determinante, gebildet aus den ersten partiellen Ableitungen der Funktionen u und v, identisch. Denn es folgt aus der Gleichung (1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,$$

also ist auch:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0.$$

Diese Determinante heiſst die *Funktionaldeterminante, Jacobische Determinante* oder kurz *die Determinante der beiden Funktionen.* Dieser Determinante sind wir schon für den Fall beliebig vieler Variabelen in 720 begegnet, und es ist uns ihr Name und ihre symbolische Bezeichnung durch

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

von dort her schon geläufig. Hier sieht man ihre entscheidende Bedeutung für den Begriff der Unabhängigkeit. Der bewiesene Satz läſst sich nämlich umkehren:

> *Verschwindet die Funktionaldeterminante der beiden Funktionen u_1 und u_2, welche von den Variabelen x_1 und x_2 abhängen, identisch, so sind diese beiden Funktionen nicht unabhängig voneinander, es besteht zwischen ihnen eine Funktionalgleichung.*

Denn denkt man sich die erste Funktion

$$u_1 = f_1(x_1, x_2)$$

nach einer der beiden Variabelen, die in derselben enthalten sind, aufgelöst, also etwa:

$$x_2 = \varphi(x_1, u_1)$$

ermittelt, und substituiert man diesen Wert in die zweite Funktion, so wird dieselbe im allgemeinen eine Funktion von x_1 und u_1; wir bezeichnen sie mit

$$u_2 = f_2(x_1, u_1).$$

Es ist zu zeigen, daſs in dieser Gleichung für u_2 die Variabele x_1 explicite nicht mehr vorkommt, daſs also die partielle Ableitung $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ identisch verschwindet. Aus der Gleichung

$$u_2 = f_2(x_1, u_1)$$

folgt:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

und setzt man diese Werte in die Funktionaldeterminante ein, die der Voraussetzung nach identisch verschwindet, so wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0.$$

Da $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ nicht identisch verschwinden kann, weil sonst u_1 die Variabele x_2 nicht enthalten würde, so ist also:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad u_2 = f_2(u).$$

725. Die Determinante von beliebig vielen Funktionen. Dieselben Sätze gelten für ein System, welches aus n Funktionen von n Variabelen besteht. Wir schicken zunächst die folgende Definition voraus:

Definition. *Sind*

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \; u_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

die gegebenen Funktionen, so heiſsen dieselben unabhängig voneinander, wenn sich aus ihnen die n Variabelen $x_1, \ldots x_n$ umgekehrt als Funktionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ darstellen lassen; dagegen heiſsen die Funktionen abhängig, wenn zwischen denselben eine oder mehrere Gleichungen bestehen.

Sind die Funktionen voneinander abhängig, so verschwindet, wie leicht zu beweisen ist, die Funktionaldeterminante identisch, und umgekehrt aus dem Verschwinden der Funktionaldeterminante folgt, dafs zwischen den Funktionen mindestens eine Gleichung besteht.

Der Beweis dieses letzten Satzes ergiebt sich folgendermafsen durch Schlufs von $n-1$ auf n. Es sei bewiesen, dafs zwischen $n-1$ Funktionen von $n-1$ Variabelen dann und nur dann eine Abhängigkeit besteht, wenn die Funktionaldeterminante derselben identisch null ist; es soll nun gezeigt werden, dafs auch aus dem Verschwinden der Funktionaldeterminante von n Funktionen mit n Variabelen eine Abhängigkeit zwischen diesen Funktionen folgt. Der Beweis ist in folgender Weise zu führen: Aus den n Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ müssen sich $n-1$ auswählen lassen, vermittelst deren man die Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ umgekehrt als Funktionen dieser Funktionen und der letzten Variabelen x_n darstellen kann. Denn wäre solch eine Auswahl nicht möglich, so würden je $n-1$ Funktionen nicht unabhängig voneinander sein in Bezug auf die $n-1$ Variabelen, es bestünde vielmehr eine Funktionalgleichung zwischen ihnen, in welcher nur noch die Variabele x_n explicite vorkommen könnte. Aus zwei dieser Funktionalgleichungen liefse sich dann auch x_n eliminieren, und man erhielte eine Funktionalgleichung zwischen den n Funktionen, infolge deren auch die Funktionaldeterminante identisch verschwindet.

Wir nehmen also an, dafs etwa die Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ als Funktionen von $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ und der letzten Variabelen x_n sich darstellen lassen. Substituiert man diese Gröfsen in die letzte Funktion, so wird auch u_n eine Funktion derselben; wir bezeichnen sie mit

$$u_n = f_n(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, x_n).$$

Es ist zu zeigen, dafs, falls die Funktionaldeterminante identisch verschwindet, die Variabele x_n in dieser Gleichung nicht mehr explicite vorkommen kann, so dafs dieselbe in der That eine Relation zwischen den n Funktionen ausdrückt. Es wird:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Trägt man diese Werte in die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

ein, so reduziert sich dieselbe auf die Form:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Funktionaldeterminante der $n-1$ Funktionen $u_1, \ldots u_{n-1}$ in Bezug auf die $n-1$ Variabelen nicht identisch verschwindet, weil zwischen diesen Funktionen keine Abhängigkeit bestehen sollte, so folgt, dafs dann

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0$$

sein mufs, womit die Behauptung bewiesen ist.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Funktionaldeterminante ist diese:

Die u seien gegebene Funktionen der x, die n Gröfsen $v_1, v_2, \ldots v_n$ ihrerseits wieder gegebene Funktionen der u, so dafs auch die v bekannte Funktionen der x werden. Alsdann ist:

$$(1) \qquad \frac{\partial(v_1, v_2, \ldots v_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{\partial(v_1, v_2, \ldots v_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

In der That, die du sind lineare Funktionen der dx:

(2) $$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} dx_n, \; (i = 1 \ldots n)$$

und die Determinante der Koeffizienten auf den rechten Seiten ist:

(2a) $$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Ebenso sind die dv lineare Funktionen der du:

(3) $$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_i}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial u_n} du_n,$$

mit der Determinante:

(3a) $$\frac{\partial(v_1, v_2, \ldots v_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots u_n)}.$$

Setzt man die Werte der du_i aus (2) in (3) ein, so werden die dv lineare Funktionen der dx, und nach einem bekannten Satze der Determinantenlehre wird die Determinante des resultierenden Gleichungssystemes das Produkt aus den Determinanten (2a) und (3a). Anderseits kann man unmittelbar die v als Funktionen der x betrachten, und dann erhält man direkt das fragliche Gleichungssystem:

(4) $$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial x_n} dx_n.$$

Dieses hat aber zur Determinante:

(4a) $$\frac{\partial(v_1, v_2, \ldots v_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Also ist, wie behauptet, die Determinante (4a) das Produkt der Determinanten (2a) und (3a).

726. Anwendung auf die Integrale. Auf Grund dieser allgemeinen Begriffe können wir die obigen Sätze über das simultane System und seine Integralgleichungen noch klarer fassen.

Besitzt das System der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

das vollständige Integralsystem

$$\Psi_1(x, x_1, \ldots x_n) = C_1, \ldots \Psi_n(x, x_1, \ldots x_n) = C_n,$$

so müssen die Funktionen $\Psi_1, \ldots \Psi_n$ so beschaffen sein, dafs sich aus den Gleichungen:

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dx} = 0, \cdots \frac{d\Psi_n}{dx} = 0$$

die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \cdots \frac{dx_n}{dx}$$

berechnen lassen, d. h. es mufs die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden sein, also sind die n Funktionen in Bezug auf die n Variabelen $x_1, \ldots x_n$ unabhängig, oder mit anderen Worten nach diesen Variabelen auflösbar.

Wenn aber aufser diesen n Funktionen noch eine weitere vorhanden ist, für die:

$$\Pi(x, x_1, \ldots x_n) = C$$

ein Integral bildet, für welche also auch:

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0$$

wird, falls man für die Differentialquotienten die ihnen proportionalen Werte einsetzt, so verschwindet die Funktionaldeterminante der $n + 1$ Funktionen: $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n, \Pi$, gebildet mit den $n + 1$ Veränderlichen $x, x_1, \ldots x_n$, d. h. es besteht eine Abhängigkeit:

$$\Pi = f(\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n).$$

727. Eine partielle Differentialgleichung. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Gleichung:

$$\Pi(x, x_1, x_2, \dots x_n) = \text{const.}$$

ein Integral des Systemes

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ist, besteht darin, dafs zufolge dieser Gleichungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

wird, dafs also identisch die Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} X_n = 0.$$

Man hat also den Satz:

Satz I. *Ist $\Pi = const.$ ein Integral des simultanen Systemes:*

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n},$$

so genügt die Funktion Π identisch der partiellen Differentialgleichung:

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} = 0.$$

Umgekehrt: *Jede Funktion Π, welche dieser partiellen Differentialgleichung genügt, giebt, wenn man sie einer willkürlichen Konstanten gleich setzt, ein Integral des Systemes jener simultanen Differentialgleichungen.*

Nach den Sätzen in Nr. 723 und 726 gilt dann ferner der

Satz II. *Wenn die partielle Differentialgleichung:*

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} = 0$$

erfüllt ist, dadurch, dafs man für Π successive n voneinander unabhängige Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_n$ einsetzt, so ist jede andere Funktion Π, welche derselben Gleichung genügt, notwendig eine Funktion von $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_n$.

§ 3. Singuläre Lösungen eines Systemes erster Ordnung.

Wir haben jetzt die im § 3 des ersten Kapitels angestellten Überlegungen auf ein System zu übertragen, beschränken uns dabei aber auf den Fall eines Systemes von zwei Differentialgleichungen mit zwei Unbekannten. Wir können dann die geometrische Anschauung zu Hilfe nehmen, während der analytische Gehalt unserer Betrachtungen sich in sehr selbstverständlicher und daher nicht weiter ausgeführter Weise auf beliebig viele Unbekannte überträgt.

728. Die Diskriminantenfläche. Gegeben sei das System

$$\begin{cases} f(x, y, z, y', z') = 0, \\ g(x, y, z, y', z') = 0; \end{cases} \tag{1}$$

f und g seien ganze rationale Funktionen von y' und z', und analytische Funktionen von x, y, z, die sich in der Umgebung, in der sich unsere Betrachtungen bewegen, regulär verhalten. Wir deuten x, y, z als rechtwinklige Koordinaten der Punkte des Raumes, y' und z' als die Richtungskoeffizienten einer durch den Punkt x, y, z gehenden Geraden, deren Projektion auf die xy-Ebene den Winkel arc tg y', deren Projektion auf die xz-Ebene den Winkel arc tg z' mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Zu jedem der ∞^3 Raumpunkte gehören dann ∞^2 „Linienelemente" (Nr. 659), im ganzen enthält also der Raum deren ∞^5. Aus ihnen sondert das System (1) ∞^3 aus, zu jedem Raumpunkte im allgemeinen eine endliche Anzahl.

Das Existenztheorem (Nr. 722) versieht uns nun mit einer vollständigen Lösung:

$$\begin{cases} y = \varphi(x, y_0, z_0) \\ z = \psi(x, y_0, z_0) \end{cases} \tag{2}$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten (y_0, z_0). Jedem Wertsystem der Konstanten entspricht eine Raumkurve, eine „partikulare Integralkurve". Es giebt ∞^2 solche Integralkurven. Das Integrationsproblem besteht also darin, die ∞^3 Linienelemente des Systemes (1) zu einer zweifachen unendlichen Schar von je ∞^1 zusammenzufassen, die sich als Linienelemente einer Kurve aneinanderreihen.

Eine *singuläre Lösung* heifst eine solche, die sich aus den letzten Gleichungen nicht durch Spezialisierung der willkürlichen Konstanten erhalten läfst. Ihr entspricht eine singuläre Integralkurve. Längs einer solchen mufs — wie wir der Nr. 664 entsprechend schliefsen — das Existenztheorem versagen, also die Jacobische Determinante identisch verschwinden (Nr. 722); es mufs also sein:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial g}{\partial z'} - \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial g}{\partial y'} = 0. \tag{3}$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und der Gleichung (3) lassen sich im allgemeinen y' und z' eliminieren, so dafs eine Gleichung zwischen x, y, z allein entsteht. Diese ergiebt geometrisch eine (reelle oder imaginäre) Fläche, wir nennen sie die *Diskriminantenfläche.* Man kann auch x, y, z aus (1) und (3) als Funktionen von y' und z' berechnen, dann erscheinen y' und z' als Parameter der Diskriminantenfläche. Von den Ausnahmefällen, in denen (1) und (3) keine Fläche bestimmen, sehen wir hier ab.

Da für eine singuläre Lösung (3) identisch, für willkürliches x, verschwindet, *so liegen die singulären Integralkurven — wenn sie überhaupt vorhanden sind — in der Diskriminantenfläche.*

Die Gleichungen (1) ordnen einem Punkt der Diskriminantenfläche im allgemeinen eine endliche Anzahl von Fortschreitungsrichtungen (y', z') zu, so dafs die Fläche mit ∞^2 Linienelementen des Systemes (1) besetzt wird. Diese brauchen aber keineswegs in die Tangentialebene der Fläche zu fallen Sollen nun Integralkurven auf der Fläche liegen, so müssen längs einer solchen die Linienelemente der Kurve — die durch die Kurvenpunkte nebst ihren Tangenten gebildet werden — sämtlich dem Systeme (1) angehören. Differentiieren wir (analog zu Nr. 666) das System (1) nach x, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 y' + f_3 z' + f_4 y'' + f_5 z'' &= 0, \\ g_1 + g_2 y' + g_3 z' + g_4 y'' + g_5 z'' &= 0; \end{aligned} \tag{4}$$

der Index i bedeutet die Ableitung nach dem i^{ten} Argument. Da nun nach (3):

$$f_4 g_5 - f_5 g_4 = 0 \tag{3}$$

ist, so folgt durch Elimination aus dem Systeme (4), *daſs für alle Punkte einer singulären Integralkurve die beiden Gleichungen:*

$$(5)\qquad \begin{cases} (f_1 g_4 - f_4 g_1) + (f_2 g_4 - f_4 g_2) y' + (f_3 g_4 - f_4 g_3) z' = 0 \\ (f_1 g_5 - f_5 g_1) + (f_2 g_5 - f_5 g_2) y' + (f_3 g_5 - f_5 g_3) z' = 0 \end{cases}$$

neben den 3 Gleichungen (1) *und* (3) *erfüllt sein müssen.* Es läſst sich also durch bloſse Eliminationen entscheiden, ob singuläre Integralkurven existieren, und sie können auch durch bloſse Eliminationen gefunden werden.

729. Die Brennfläche. Wir gehen jetzt, indem wir die Betrachtungen der Nr. 668 übertragen, von dem vollständigen Systeme der Integralkurven aus. Es seien:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Phi(x,\, y,\, z,\, a,\, b) = 0 \\ \Psi(x,\, y,\, z,\, a,\, b) = 0 \end{cases}$$

die Integralgleichungen des Systemes (1) der vorigen Nummer, a und b seien die willkürlichen Konstanten. Sie bestimmen eine Schar von ∞^2 Kurven oder — wie man sagt — eine *Kurvenkongruenz.*

Man kann nun die ∞^2 Kurven dieser Kongruenz irgendwie anordnen in eine einfach unendliche Schar von Flächen, deren jede ∞^1 Kurven der Kongruenz zusammenfaſst. Wir fragen nach der Fläche, welche eine solche Schar einhüllt (Nr. 280).

Eine Art der Anordnung erhält man z. B., wenn man sich b aus den beiden Gleichungen (2) eliminiert denkt, etwa aus der zweiten Gleichung $\Psi = 0$ in die erste einsetzt. Es entsteht dann eine Gleichung zwischen x, y, z und a, die eine Schar von ∞^1 Flächen mit dem Parameter a darstellt. Wir finden nach Nr. 280 die Einhüllende dieser Schar, wenn wir die erste Gleichung $\Phi = 0$ bei konstantem x, y, z nach a differentiieren und b als eine Funktion von a betrachten, die aus der zweiten Gleichung $\Psi = 0$ zu bestimmen ist. Wir erhalten so:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi}{\partial b} db = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a} da + \frac{\partial \Psi}{\partial b} db = 0$$

und durch Elimination von $\frac{db}{da}$:

(6) $$X = \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial \Psi}{\partial b} - \frac{\partial \Psi}{\partial a}\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0.$$

Die drei Gleichungen (2) und (6) ergeben durch Elimination von a und b die Gleichung der gesuchten einhüllenden Fläche. Man kann auch x, y, z als Funktionen von a und b aus den drei Gleichungen berechnen und dann a und b als Flächenkoordinaten der Einhüllenden auffassen. Ein bestimmtes Wertsystem (a, b) bezeichnet dann diejenigen Punkte der Einhüllenden, welche sie mit der durch dasselbe Wertsystem charakterisierten Kurve der Kongruenz (2) gemein hat.

In allgemeinster Weise wird man die Kurven der Kongruenz dadurch zu einer Schar von ∞^1 Flächen zusammenfassen, dafs man a und b als Funktionen zweier neuen Parameter α und β darstellt und nun mit α und β so verfährt, wie vorher mit a und b.

Die Einhüllende bestimmt sich dann analog aus dem Gleichungssystem:

(6a) $$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0,$$

nur mufs man sich in Φ und Ψ, α und β statt a und b eingeführt denken. Die linke Seite der letzten Gleichung ist aber die Funktionaldeterminante von Φ und Ψ in Bezug auf α und β, wenn man x, y, z als fest ansieht. Die linke Seite von (6) ist die Determinante derselben Funktionen in Bezug auf a und b. Beide unterscheiden sich daher nur um einen von Null verschiedenen Faktor (Nr. 725). Also ist die letzte Gleichung (6a) mit (6) identisch und mithin auch das System (6a) mit dem Systeme der Gleichungen (2) und (6). Hieraus folgt:

Auf welche Weise man auch die Kurven der Kongruenz zu einfach unendlich vielen Flächen zusammenfassen mag, die Einhüllende der Flächenschar ist immer die nämliche Fläche.

Sie ist daher für die Kongruenz charakteristisch und heifst die *Brennfläche der Kongruenz.*

Nach Nr. 281 berühren die Flächen einer Schar die Einhüllende. Die gemeinsamen Berührungskurven nannten wir

die *Charakteristiken* der Flächenschar. Hieraus folgt, dafs auch die Integralkurven (2) die Brennfläche berühren, diese erscheint also als die Einhüllende der Kurven unserer Kongruenz. Die Charakteristiken sind aber im allgemeinen nicht Kurven der Kongruenz.

Betrachtet man eine Flächenschar $\beta = \text{const.}$, so wird diese durch (2) definiert, wenn man statt a und b, α und β einführt. Die zugehörigen Charakteristiken erhält man, wenn man zu den Gleichungen (2) noch (6) hinzunimmt. Die Tangentenrichtung $dx:dy:dz$ längs der Charakteristiken ergeben die 3 Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz + \frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Nur dann, wenn sich diese nicht nach dx, dy, dz auflösen lassen oder, wenn man für alle 3 Differentiale den Wert 0 findet, so dafs das System die Tangentenrichtung nicht bestimmt, wird die Giltigkeit unserer Sätze in Frage gestellt. Die Auflösung nach dx, dy, dz wird aber unmöglich, sobald die Determinante:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Wir fragen jetzt nach der *Einhüllenden* der Charakteristiken $b = \text{const.}$, also nach der *Rückkehrkurve* unserer Flächenschar $b = \text{const.}$ Nach Nr. 282 berührt diese im allgemeinen wieder die Charakteristiken. Um sie zu finden, müssen wir von einer bestimmten Charakteristik b zu einer benachbarten $b + db$ übergehen und den Ort ihres Schnittpunktes bestimmen. Ist da das db entsprechende Differential, so folgt, dafs der Schnitt-

punkt den Gleichungen (2), (6) und den folgenden drei genügen mufs:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi}{\partial b} db = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a} da + \frac{\partial \Psi}{\partial b} db = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial a} da + \frac{\partial X}{\partial b} db = 0.$$

Es ergiebt sich also das System von vier Gleichungen:

$$(8) \qquad \Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} : \frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial \Psi}{\partial a} : \frac{\partial \Psi}{\partial b} = \frac{\partial X}{\partial a} : \frac{\partial X}{\partial b}$$

zur Bestimmung der Rückkehrkurve. Da die letzten beiden Gleichungen wieder ein Verschwinden von Funktionaldeterminanten bedeuten, ist die Rückkehrkurve unabhängig von der speziellen Wahl der Flächenschar, durch die man sie bestimmt. Wir wollen sie die *Brennlinie der Kongruenz* nennen.

Von einer Kurve (a, b) der Kongruenz kann man immer zu einer benachbarten $(a + da, b + db)$ übergehen, welche die erste trifft. Die Koordinaten des Treffpunktes (x, y, z) müssen nämlich den vier Gleichungen:

$$(9) \quad \Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi}{\partial b} db = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a} da + \frac{\partial \Psi}{\partial b} db = 0,$$

also — wie die Elimination von $\frac{db}{da}$ ergiebt — den 3 Gleichungen (2) und (6) genügen. *Der Ort der Schnittpunkte ist also die Brennfläche.* Das für ein Wertsystem (a, b) sich ergebende Verhältnis $\frac{db}{da}$ selbst bestimmt die Richtung der Tangente an die Integralkurve in dem Punkte (a, b). Diese ist gleichzeitig im allgemeinen Tangente an die Brennfläche, wie wir oben sahen. Es legen sich so an die ∞^2 Punkte der Brennfläche ∞^2 Fortschreitungsrichtungen $\frac{db}{da}$, welche die Tangenten der berührenden Integralkurven und daher Linienelemente des Systemes (1) bilden.

Es fragt sich nun, ob man die Punkte der Brennfläche nicht derart zu Kurven zusammenfassen kann, dafs die Linienelemente derselben in die soeben definierten ∞^2 Linienelemente hineinfallen. Ist dies möglich, so sind die Kurven im allgemeinen Integralkurven des Systemes (1) und zwar — soweit sie nicht zufällig selbst der Kongruenz (1) angehören — *singuläre Integralkurven.* Denken wir uns aus den Gleichungen (2) und (6), x, y, z als Funktionen von a und b berechnet

und in die beiden letzten Gleichungen (9) eingesetzt, so ergeben sich zwei Differentialgleichungen in a und b; diese müssen einen gemeinsamen Bestandteil haben, weil wegen $X=0$ die linken Seiten der beiden Differentialgleichungen (9) sich nur um einen Faktor unterscheiden können. Setzt man diesen gemeinsamen Bestandteil gleich null, so erhält man eine Differentialgleichung:

$$H\left(a,\, b,\, \frac{db}{da}\right)=0 \tag{10}$$

für unsere gesuchten Integralkurven. Wird diese illusorisch, so giebt es keine singulären Integralkurven der verlangten Art.

Die Differentialgleichung (10) bestimmt nun im allgemeinen eine Schar von ∞^1 Kurven

$$b=f(a,\, c), \tag{11}$$

sie zerlegt unsere Brennfläche in eine Schar von ∞^1 singulären Integralkurven des Systemes (1). Der Parameter c ist die Integrationskonstante. Hat die Differentialgleichung (10) ihrerseits wieder eine singuläre Lösung $b=\varphi(a)$, welche geometrisch als Einhüllende der Kurvenschar (11) erscheint, so giebt diese offenbar die Brennlinie unserer Kongruenz; denn die ∞^1 Kurven (11) bilden nur eine besondere Schar von Charakteristiken auf der Brennfläche.

730. Einfache Beispiele. Wir wollen jetzt einige sehr einfache Beispiele behandeln, die die verschiedenen Möglichkeiten, die bei den singulären Integralen vorkommen können, erläutern sollen.

1. Das System:

$$f=y'^2-1=0, \quad g=z'^2-1=0 \tag{1}$$

hat zu Integralkurven die Kongruenz:

$$\begin{aligned} \Phi &= (y-a)^2-x^2=0 \\ \Psi &= (z-b)^2-x^2=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Jedem Wertsystem a, b der Konstanten entspricht also eine Kurve vierter Ordnung, die in 4 durch einen Punkt gehende Gerade zerfällt. Ihr gemeinsamer Punkt

$$x=0, \quad y=a, \quad z=b$$

repräsentiert also einen vierfachen Punkt der Kurve. Durch den Punkt O gehen z. B. die vier Geraden

$$y = \pm x, \quad z = \pm x,$$

die gegen alle Koordinatenachsen gleich geneigt sind. Denkt man sich zu ihnen durch jeden Punkt der yz-Ebene 4 Parallele gezogen, so entsteht die Kongruenz. Die Brennfläche wird, da

$$X = 4(y - a)(z - b) = 0,$$

die mehrfach zählende yz-Ebene:

$$x = 0.$$

Die Kurven der Kongruenz berühren sie aber nicht, die Brennfläche ist vielmehr für jene ein Ort singulärer Punkte. Das System (1) besitzt also überhaupt keine singulären Integrale, und dies bestätigen auch die Regeln der Nr. 728, wenn man sie direkt auf das System (1) anwendet. Es existiert nicht einmal die Diskriminantenfläche.

2. Das System:

$$(1) \quad f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0, \quad g = \frac{1}{2}(z - r)^2 \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2 - 2rz = 0$$

ergiebt zur Bestimmung der Diskriminantenfläche:

$$f_4 g_5 - f_5 g_4 = 2(z - r)^2 y' z' = 0.$$

Die drei Gleichungen sind dann und nur dann gleichzeitig erfüllt, wenn:

$$z(z - 2r) = 0, \quad y' = \pm 1, \quad z' = 0$$

ist. Die Diskriminantenfläche ist also eine Fläche zweiter Ordnung, die in zwei zur xy-Ebene parallele Ebenen zerfällt. Die Linienelemente, die das System (1) den einzelnen Punkten der Diskriminantenfläche zuordnet, haben Fortschreitungsrichtungen, welche — wegen $z' = 0$ — selbst in die Diskriminantenfläche hineinfallen. Also zerlegt sich die Diskriminantenfläche in eine Schar von $2 \cdot \infty^1$ singulären Integralkurven:

$$\begin{matrix} y = \pm x + b \\ z = 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} y = \pm x + b \\ z = 2r, \end{matrix}$$

die aus allen Geraden der Fläche besteht, die mit der x- und y-Achse gleiche Winkel einschliefsen.

Das vollständige Integral von (1) wird:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Phi &= (x-a)^2-(y-b)^2=0 \\ \Psi &= (x-a)^2+(y-b)^2+(z-r)^2-r^2=0. \end{aligned}$$

Die Kongruenz besteht also aus ∞^2 Kurven 4ter Ordnung, deren jede in zwei Kreise zerfällt. Man erhält sie, wenn man jede der ∞^2 Kugeln, welche die Ebenen $z=0$ und $z=2r$ berühren, durch die zwei durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebenen schneidet, die gegen die Ebenen $x=0$ und $y=0$ gleichgeneigt sind. Die Brennfläche der Kongruenz ergiebt sich aus

$$X = 8(x-a)(y-b) = 0$$

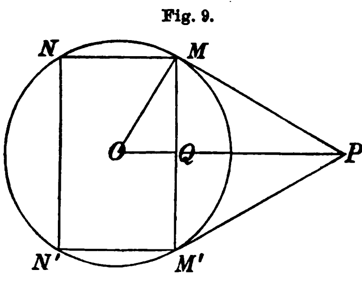
als

$$z(z-2r) = 0.$$

Sie ist also mit der Diskriminantenfläche identisch. Diesmal berühren die Integralkurven der Kongruenz die Brennfläche. Es existiert zwar eine Schar von ∞^1 singulären Integralkurven — die aus der Differentialgleichung gefundene —, aber das Verfahren der Nr. 729 kann sie nicht liefern, weil die Berührungspunkte unserer Kongruenzkurven mit der Fläche Doppelpunkte der Kongruenzkurven, also wieder singuläre Punkte sind. In der That geht die Gleichung (10) einfach in $0=0$ über. Die Gleichungen der Rückkehrkurve werden ebenfalls $0=0$. Eine solche existiert überhaupt nicht.

3. Wir betrachten drittens eine Kongruenz, deren Eigenschaften wir aber nur geometrisch — unter Beiseitelassung der Vorkommnisse im Imaginären — studieren. Eine Kugel mit dem Radius r und dem Mittelpunkte O schneiden wir durch eine „Äquatorebene" $\mathfrak{A}$. In ihr schlagen wir um O einen Kreis mit dem Radius $2r$. Von jedem Punkte P (Fig. 9) der Peripherie dieses Kreises legen wir dann den Tangentialkegel an die Kugel. Die Erzeugenden PM aller dieser Kegel bilden die Kongruenz,

Fig. 9.



die wir betrachten. Ihre Kurven sind also lauter Gerade. Man kann sich dasjenige System von Differentialgleichungen (1) aufgestellt denken, dessen Integralkurven jene Erzeugenden sind. Die Kegel, von denen wir eben sprachen, geben eine Art, die Kurven der Kongruenz in eine Flächenschar zusammenzufassen. Ihre Einhüllende ist die Kugel. Diese ist also die Brennfläche, die von den sämtlichen Erzeugenden berührt und dadurch zugleich mit einer Schar von ∞^2 Linienelementen des Systemes (1) ausgestattet wird. Jeder Kegel berührt die Kugel längs eines Vertikalkreises mit dem Radius $\frac{r}{2}$, dessen Ebene senkrecht auf der Achse OP des Kegels steht und die in der Figur zu dem Durchmesser MM' verkürzt erscheint. Diese Vertikalkreise sind die Charakteristiken der Kegelschar, sie sind keine Integralkurven. Ihre Einhüllende sind zwei Parallelkreise MN und $M'N'$, deren Ebenen in den Abständen $\pm\frac{r}{2}\sqrt{3}$ von der Äquatorebene sich befinden. In der Figur sind nur ihre Durchmesser MN, $M'N'$ wiedergegeben, in denen sie die Ebene der Zeichnung schneiden. Die beiden Kreise MN und $M'N'$ bilden zusammen die Brennlinie der Kongruenz, die Rückkehrkurve unserer Flächenschar. Man sieht, dafs die Linienelemente MP der Kongruenz keineswegs tangential zur Brennlinie sind, diese ist also keine Integralkurve. Dagegen kann man, auf der Kugel von Punkt zu Punkt fortschreitend, eine Schar von ∞^1 transcendenten Kurven zeichnen, deren Linienelemente dem Systeme (1) angehören. Aber nur den Punkten der Kugel, deren Abstand von der Äquatorebene kleiner ist als $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, entsprechen reelle Linienelemente, denen, deren Abstand gröfser ist, aber nicht. Also mufs eine singuläre Integralkurve, sobald sie einen Punkt der Brennlinie erreicht, dort endigen oder wieder umkehren. Im letzteren Falle ist sie also eine „Rückkehrkurve“ im eigentlichsten Sinne des Wortes. Zugleich erhellt, dafs die Punkte der Brennlinie singuläre Punkte für die singulären Integralkurven sind.

4. Wir wollen schliefslich noch eine Ausartung des vorigen Beispiels behandeln, bei welcher der Radius des Kreises, auf welchem die Kegelspitzen P liegen, ins Unendliche rückt. Die Kegel werden dann zu Cylindern. Die Kongruenz besteht aus

allen Tangenten der Kugel, die der Äquatorebene parallel sind. Die Charakteristiken der Cylinder werden die Meridiane der Kugel, die Brennlinie artet aus in die beiden Pole, durch die ∞^1 horizontale Fortschreitungsrichtungen hindurchgehen, die gleichzeitig die Kugel berühren und dem Systeme (1) angehören. Die Koordinaten der Pole werden also das System (1) bei willkürlichem y', z' erfüllen, und zugleich können sie als partikulare und als singuläre ausgeartete Integralkurven aufgefaſst werden. Die ∞^1 Integralkurven, zu welchen die ∞^2 Linienelemente der Kugel sich zusammenreihen, werden die Parallelkreise der Kugel.

Die Formeln, die im vorigen Beispiele ziemlich kompliziert sein würden, werden jetzt so einfach, daſs wir sie direkt aus der Anschauung ablesen können.

Die Tangente im Kugelpunkte (a, b, c) wird:

$$\Phi = ax + by + cz - r^2 = 0$$
$$\Psi = \qquad z - c = 0,$$

wobei:

$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0.$$

Es folgt:

$$X = \frac{bx - ay}{c} = 0$$

zur Bestimmung der Brennfläche:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Die Differentialgleichungen:

$$d\Phi = 0 = 0$$
$$d\Psi = \frac{a da + b db}{c} = 0$$

ergeben als gemeinsamen Bestandteil die ∞^1 singulären Integralkurven

$$a^2 + b^2 = \text{const.},$$

also die Parallelkreise.

Als singuläre Integrale dürfen aufgefaſst werden die Pole

$$a = 0, \quad b = 0, \quad r = \pm c,$$

für welche $d\Psi = 0$ bei beliebigem $da : db$ erfüllt ist. Für sie ist gleichzeitig

$$dX = \frac{-b da + a db}{c} = 0.$$

Sie sind also zugleich die Rückkehrkurven.

731. Das der Clairautschen Gleichung analoge System. In den beiden letzten Beispielen waren die Integralkurven der Kongruenz lauter gerade Linien. Wir fragen jetzt allgemein nach der Form und den Eigenschaften derjenigen Systeme von Differentialgleichungen, deren partikulare Integrale sämtlich durch gerade Linien dargestellt werden. Haben wir nur *eine* Differentialgleichung erster Ordnung, so entnehmen wir der Nr. 711, daſs sie gerade die Clairautsche Form haben muſs, wenn ihre Integralkurven gerade Linien sein sollen. Wir können also das von uns gesuchte System als ein Analogon zur Clairautschen Gleichung auffassen.

Wir denken uns die Gleichungen der Geraden nach y und z aufgelöst; dann ist die Kongruenz durch die Gleichungen gegeben:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Phi = y - ax + \varphi(a,\, b) = 0 \\ \Psi = z - bx + \psi(a,\, b) = 0; \end{cases}$$

φ und ψ sind gegebene Funktionen der Integrationskonstanten $(a,\, b)$, die man sich vorläufig als eindeutige analytische Funktionen vorstellen möge. Die Konstanten selbst geben die Richtungskoeffizienten:

$$a = y', \quad b = z'$$

der Geraden. Das zugehörige System der Differentialgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} f = y - xy' + \varphi(y',\, z') = 0 \\ g = z - xz' + \psi(y',\, z') = 0 \end{cases}$$

unterscheidet sich also nur durch die Buchstaben von dem der Integralgleichungen. Die Diskriminantenfläche wird durch Hinzunahme der Gleichung:

$$(3)\quad h = f_4 g_5 - f_5 g_4 = x^2 - (\varphi_1 + \psi_2)\, x + (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) = 0$$

zu (1) definiert. Setzt man für y' wieder a, für z' wieder b, so wird aus h die Funktion X, aus der Gleichung (3) die Gleichung (6). *Daher ist die Diskriminantenfläche mit der Brennfläche identisch.* Da die Gleichung (3) quadratisch in x ist, liegen auf einem Strahl $(a,\, b)$ im allgemeinen *zwei* Punkte $(a,\, b,\, x)$ der Brennfläche. Diese besteht also aus zwei Mänteln, und die Geraden der Kongruenz sind *Doppeltangenten.* Da

eine gerade Linie keine singulären Punkte hat, berühren die Geraden die Brennfläche, die Linienelemente des Systemes (1) sind daher tangential zur Diskriminantenfläche. Existiert diese, so giebt es also auch immer singuläre Lösungen. In der That findet man, dafs die Bedingungen (5) der Nr. 728 identisch für alle Punkte der Fläche erfüllt sind. Ferner wird:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi}{\partial b} db = (-x + \varphi_1) da + \varphi_2 db = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} da + \frac{\partial \Psi}{\partial b} db = \psi_1 da + (-x + \psi_2) db = 0.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst x:

$$x = \varphi_2 \frac{db}{da} + \varphi_1 = \psi_1 \frac{da}{db} + \psi_2$$

als lineare Funktion von $\frac{db}{da}$. Einem Punkte (a, b, x) der Brennfläche entspricht also im allgemeinen auch nur 1 Wert von $\frac{db}{da}$, durch ihn geht also auch nur eine singuläre Integralkurve hindurch. Trotzdem ergiebt sich, wenn man den Wert von x aus der letzten Gleichung in (3) einsetzt, eine quadratische Gleichung für $\frac{db}{da}$:

$$\varphi_2 db^2 + (\varphi_1 - \psi_2) da db - \psi_1 da^2 = 0. \tag{10a}$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung (10). Sie läfst sich noch einfacher schreiben in der Form:

$$\frac{db}{da} = \frac{d\psi}{d\varphi}. \tag{10}$$

Diese Gleichung drückt — wie wir oben sahen — zugleich die Bedingung aus, dafs zwei benachbarte Strahlen (a, b) und $(a + da,\ b + db)$ sich schneiden. Da sie quadratisch ist in $\frac{db}{da}$, so gehören zu einem Strahl (a, b) im allgemeinen immer *zwei* solche Nachbarstrahlen, also auch zwei durch (a, b) gehende Ebenen, die beide — wie wir gleich sehen werden — die Brennfläche berühren. Da aber x linear in $\frac{db}{da}$ ist, so mufs die eine von ihnen in dem einen, die andere in dem anderen Berührungspunkte (a, b, x) des Strahles (a, b) die Brennfläche berühren. Längs den ∞^1 Integralkurven von (10) ordnen sich

die Strahlen zu einer Schar von ∞^1 abwickelbaren Flächen zusammen, deren Rückkehrkurven eben diese Integralkurven sind und die unsere Brennfläche einhüllen. Die eben betrachteten Ebenen sind die Tangentialebenen dieser abwickelbaren Flächen und berühren daher — wie behauptet — auch die Brennfläche.

Betrachten wir aber die ∞^1 abwickelbaren Flächen — oder irgend ∞^1 andere Flächen der Kongruenz — als die Flächenschar, von der wir ausgehen, so wird deren Rückkehrkurve — also die Brennlinie der Kongruenz — durch Nullsetzen der Determinante (7) in Nr. 729 erhalten. So entsteht die Gleichung:

$$x - \frac{\varphi_1 + \psi_2}{2} = 0. \tag{7}$$

Diese drückt aus, dafs die Gleichung:

$$X = x^2 - (\varphi_1 + \psi_2)x + (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = 0 \tag{6}$$

gleiche Wurzeln hat. Eliminiert man x aus (6) und (7), so wird

$$(\varphi_1 + \psi_2)^2 - 4(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = 0 \tag{8}$$

die Gleichung der Brennlinie in den Koordinaten a und b.

Vergleicht man (8) mit der Differentialgleichung (10a), so erkennt man, dafs die Brennlinie der Kongruenz die Diskriminantenkurve dieser Differentialgleichung ist.

732. Die Normalen einer Fläche. Wir betrachten jetzt den besonderen Fall, dafs die Geraden unserer Kongruenz die ∞^2 Normalen einer Fläche Ω sind. Alsdann wird dieser eine ganz bestimmte „Brennfläche" zugeordnet, welche die Normalen einhüllen und die die Evolutenfläche von Ω heifst.

Seien a, b, c die rechtwinkligen Koordinaten der Fläche Ω und

$$c = \varphi(a, b)$$

ihre Gleichung; x, y, z seien die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte ihrer Normalen. Alsdann wird die Kongruenz:

$$\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{-1}. \tag{2}$$

Dabei bedeuten p und q die partiellen Ableitungen von

$$c = \varphi(a, b)$$

nach a und b, analog werden wir die zweiten Ableitungen von φ nachher mit r, s, t in der bekannten Reihenfolge bezeichnen. Will man das zur Kongruenz (2) gehörige System (1) der Differentialgleichungen haben, so hat man die Gleichungen (2) nach x zu differentiieren und aus diesen 2 Gleichungen und den Gleichungen (2) selbst die beiden Konstanten a, b zu eliminieren.

Wir wollen die Punkte (x, y, z) einer Normalen durch einen Parameter R bestimmen, der die Entfernung derselben von dem Punkte (a, b, c) der Fläche Ω bezeichnet, in welchem die Normale errichtet ist. Dabei geben wir R das positive Zeichen auf der positiven Seite der Fläche Ω, das negative auf der anderen (Nr. 304). Da die Kosinus der Winkel, welche die Normale mit den Achsen bildet, durch die in Nr. 304, p. 416, berechneten Ausdrücke gegeben werden, so werden dann

$$(2a) \qquad x - a = \frac{-pR}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad y - b = \frac{-qR}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$z - c = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

die Gleichungen der Normalen. Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist dabei positiv zu nehmen. Durch Elimination von R kommt man wieder auf die Gleichungen (2). Aus ihnen erhält man in bekannter Weise durch partielle Differentiation nach a und b die Gleichung (6), $X = 0$, der Nr. 729. Sie wird, wie die Nr. 731 lehrt, vom zweiten Grade. Führt man in sie mit Hilfe der ersten Gleichung (2a) wieder den Parameter R ein, so entsteht eine quadratische Gleichung für R. Durch Division kann man den Koeffizienten von R^2 zu 1 machen, dann werden aber die Koeffizienten der ersten Potenz von R und das von R freie Glied gerade den Ausdrücken gleich, die wir in den Gleichungen (9) der Nr. 315 für $-(R_1 + R_2)$ und R_1 und R_2 gefunden hatten. Also wird die Gleichung der Evolutenfläche einfach:

$$R^2 - (R_1 + R_2) \cdot R + R_1 R_2 = 0$$

oder:

$$(6) \qquad (R - R_1)(R - R_2) = 0;$$

R_1 und R_2 bedeuteten die Hauptkrümmungsradien im Punkte (a, b) der Fläche Ω. Das heißt aber:

Die Evolutenfläche der Normalen einer Fläche Ω wird durch die Endpunkte der Hauptkrümmungsradien der Fläche Ω gebildet.

Um die ∞^1 singulären Integralkurven des die Normalen charakterisierenden Differentialgleichungssystemes zu finden, muſs man auf der gegebenen Fläche Ω so vorwärts gehen, daſs zwei benachbarte Normalen sich schneiden (Nr. 729); *d. h. man muſs die Normalen längs der Krümmungslinien der Fläche Ω verfolgen* (Nr. 320). In der That lehrt auch die direkte Ausrechnung, daſs die Differentialgleichung (10a) der vorigen Nummer genau in die in Nr. 320, Gleichung (6), aufgestellte Differentialgleichung der Krümmungslinien übergeht.

Die Brennlinie wird endlich durch die Bedingung charakterisiert, daſs die quadratische Gleichung (6) gleiche Wurzeln hat, wie dies in der vorigen Nummer ausgeführt wurde. In den entsprechenden Punkten der Fläche Ω werden also die Hauptkrümmungsradien einander gleich. Nehmen wir nun an, die Fläche Ω erfülle alle in den Nummern 304 ff. an sie gestellten Anforderungen und biete nicht etwa einen von den in Nr. 313 behandelten Ausnahmefällen, so folgt aus der Gleichung (10) der Nr. 317, daſs der Punkt (a, b) ein Nabelpunkt ist. Wir sehen also:

Die Punkte der Brennlinie entsprechen den Nabelpunkten der Fläche Ω.

Im allgemeinen wird also, soweit man sich auf reguläre Fälle beschränkt, die Brennlinie hier nur aus einzelnen Punkten bestehen.

§ 4. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

733. Zurückführung auf ein System erster Ordnung. Ist eine Differentialgleichung von irgend welcher Ordnung oder ein System von solchen Gleichungen gegeben, so kann man dafür stets ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung substituieren, indem man neue Variabele einführt und die Zahl der Gleichungen vermehrt, wie wir schon in Nr. 77 angedeutet haben. Denn wenn man mit x die unabhängige Variabele bezeichnet, mit y eine der abhängigen

und mit m die höchste Ordnung der Ableitungen von y, welche in der gegebenen Gleichung oder dem gegebenen Systeme vorkommen, so hat man

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{dy'}{dx}=y'', \ldots \frac{dy^{(m-2)}}{dx}=y^{(m-1)}$$

zu setzen. Diese Gleichungen verbindet man mit den gegebenen, indem man in diesen

$$y', \quad y'', \ldots y^{(m-2)}, \quad y^{(m-1)}, \quad \frac{dy^{(m-1)}}{dx}$$

an Stelle von

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad \frac{d^my}{dx^m}$$

setzt.

Desgleichen hat man, wenn n die höchste Ordnung unter den Ableitungen einer anderen Variabelen z in dem Systeme bezeichnet, die neuen Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx}=z', \quad \frac{d^2z}{dx^2}=z'', \ldots \frac{dz^{(n-2)}}{dx}=z^{(n-1)}$$

einzuführen, nachdem man

$$z', \quad z'', \ldots z^{(n-1)}, \quad \frac{dz^{(n-1)}}{dx}$$

an Stelle von

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^nz}{dx^n}$$

gesetzt hat.

Fährt man so fort, so erhält man ein System, welches dem gegebenen äquivalent ist, und in welchem keine Gleichung von höherer als der ersten Ordnung ist.

Ist z. B. nur *eine* Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gegeben:

$$F(x, y, y', \cdots y^{(n)})=0, \tag{1}$$

so wird diese durch die Substitution

$$y=y_1, \quad y'=y_2, \cdots, \quad y^{(n-1)}=y_n \tag{2}$$

auf das simultane System erster Ordnung zurückgeführt:

$$\begin{cases} F_1=y_1'-y_2=0 \\ F_2=y_2'-y_3=0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_{n-1}=y_{n-1}'-y_n=0 \\ F_n=F(x, y_1, y_2, \cdots y_n, y_n')=0. \end{cases} \tag{3}$$

Dieses System ist der Gleichung (1) vollständig äquivalent.

734. Die Integration einer Differentialgleichung höherer Ordnung. In dem simultanen Systeme (3) der vorigen Nummer hat die Funktionaldeterminante der F in Bezug auf die y' den Wert:

$$\frac{\partial(F_1 F_2, \dots F_n)}{\partial(y'_1, y'_2, \dots y'_n)} = \frac{\partial F}{\partial y'_n}.$$

Es sei nun F eine analytische Funktion ihrer Argumente und

$$(4) \qquad x = x_0, \quad y_1 = b_0, \quad y_2 = b_1, \dots, \quad y_n = b_{n-1}$$

eine Stelle, in deren Umgebung sie sich regulär verhält und für die $\frac{\partial F}{\partial y'_n}$ nicht verschwindet. Alsdann giebt es, nach dem Existenztheorem der Nr. 722, n Funktionen

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, b_0, b_1, \dots b_{n-1}), \\ y_2 = \varphi_2(x, b_0, b_1, \dots b_{n-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, b_0, b_1, \dots b_{n-1}), \end{cases}$$

die sich in der Umgebung von $x = x_0$ regulär verhalten, für welche die y die durch (4) bezeichneten „willkürlichen Anfangswerte“ annehmen und die eine vollständige Lösung des Systemes (3) darstellen. Hieraus folgt, daſs die Differentialgleichung

$$(1) \qquad F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

durch eine reguläre analytische Funktion

$$(5a) \qquad y = \varphi_1(x, b_0, b_1, \dots b_{n-1})$$

befriedigt wird, solange F selbst regulär und $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$ von null verschieden ist. Die Gleichung (5a) nennen wir eine *vollständige Lösung* der Differentialgleichung (1), weil sie n willkürliche Konstante enthält; b_i ist der „Anfangswert“, den die i^{te} Ableitung von y an der Stelle x_0 annimmt. Die Anfangswerte von

$$y, y', \dots y^{(n-1)}$$

können also, abgesehen von den Beschränkungen des Existenztheorems, willkürlich vorgeschrieben werden.

Hat man irgend eine Gleichung zwischen x, y und n willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \dots C_n$:

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots C_n) = 0,$$

so nennt man sie ein *Integral* von (1), wenn die aus ihr und durch Differentiation berechneten Werte von

$$y, y', \ldots, y^{(n)}$$

die Differentialgleichung (1) identisch für beliebige Werte von

$$x, C_1, C_2, \ldots C_n$$

erfüllen. Man sagt, $\varphi = 0$ ist ein *vollständiges Integral*, wenn die Anzahl der willkürlichen Konstanten in ihr wirklich n ist und sich nicht auf weniger als n reduziert.

Sei allgemeiner:

$$\varphi(x, y, y', \ldots y^{(m)}) = 0$$

eine Gleichung, in welcher $m < n$ ist. Wir sagen, sie *erfüllt* unsere Differentialgleichung oder ist *ein Integral* von ihr, wenn die aus ihr und den abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \ldots \quad \frac{d^{n-m}\varphi}{dx^{n-m}} = 0$$

berechneten Werte von

$$y^{(m)}, \quad y^{(m+1)}, \ldots y^{(n)}$$

die Gleichung (1) identisch für willkürliche Werte

$$x, y, y', \ldots y^{(m-1)}$$

befriedigen. Ist $m > 0$, so nennen wir das Integral ein *intermediäres* und, genauer, ein *intermediäres Integral* m^{ter} *Ordnung* oder auch ein $n - m^{\text{tes}}$ *Integral* von (1). Die Existenz solcher Integrale ist leicht einzusehen, man erkennt dabei, daſs das allgemeine intermediäre Integral m^{ter} Ordnung von $n - m$ *willkürlichen Konstanten* abhängt. In der That, das unserer Differentialgleichung (1) äquivalente System (3) der vorigen Nummer wird durch die vollständige Lösung (5) identisch befriedigt. Schon in Nr. 723 haben wir darauf aufmerksam gemacht, daſs die Gleichungen (5) sich nach den willkürlichen Konstanten auflösen lassen. Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_0}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_0}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial b_0}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial b_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix}$$

ist, in der Umgebung der betrachteten Stelle, von null verschieden, und ihre einzelnen Elemente verhalten sich in dieser regulär.

Wir betrachten eine Unterdeterminante von der Form:

$$D_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial b_0}, & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial b_{m-1}}, & \frac{\partial y_1}{\partial b_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_{m+1}}{\partial b_0}, & \dots & \frac{\partial y_{m+1}}{\partial b_{m-1}}, & \frac{\partial y_{m+1}}{\partial b_r} \end{vmatrix},$$

wo $n > r \geqq m$ ist. Für $y_1, \dots y_{m+1}$ gelten in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ die Reihenentwickelungen:

$$y_1 = b_0 + b_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{1!} + \dots + b_m \frac{(x-x_0)^m}{(m)!} + \dots + b_r \cdot \frac{(x-x_0)^r}{r!} + \dots$$

$$y_2 = \qquad b_1 \qquad + \dots + b_m \frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + b_r \cdot \frac{(x-x_0)^{r-1}}{(r-1)!} + \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_{m+1} = \qquad b_m \qquad + \dots + b_r \cdot \frac{(x-x_0)^{r-m}}{(r-m)!} + \dots$$

Hieraus folgt für D_r die Reihenentwickelung:

$$D_r = \frac{(x-x_0)^{r-m}}{(r-m)!} + \dots,$$

wo die Punkte höhere Potenzen von $x - x_0$ bedeuten. Hieraus folgt, daſs D_r, wenn $r > m$ ist, in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ nicht identisch für alle Werte verschwindet und, daſs D_m sogar an der Stelle $x = x_0$ selbst von 0 verschieden, nämlich gleich 1 ist. Ebenso ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial b_0}, & \frac{\partial y_1}{\partial b_1}, \dots & \frac{\partial y_1}{\partial b_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial b_0}, & \frac{\partial y_m}{\partial b_1}, \dots & \frac{\partial y_m}{\partial b_{m-1}} \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ gleich 1 (s. u.), also auch in der Umgebung dieser Stelle nicht null. Wir können daher die erste bis m^{te} Gleichung des Systemes (5) nach $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$ auflösen und die erhaltenen Ausdrücke in die $m+1^{te}$ Gleichung (5) einsetzen. Es entsteht so eine Gleichung zwischen $y_1, \dots y_{m+1}, b_m, \dots b_{n-1}$:

$$(6) \qquad \Phi(x, y_1, y_2, \dots y_{m+1}; \ b_m, \dots b_{n-1}) = 0.$$

Diese enthält nun sicher y_{m+1}. Wäre sie von y_{m+1} frei, so wären $y_1 \dots y_m$ nicht m unabhängige Funktionen von $b_0, b_1 \dots b_{m-1}$. Es müſste also ihre Determinante:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots y_m)}{\partial(b_0, b_1, \dots b_{m-1})}$$

identisch in x verschwinden. Diese hat aber für $x = x_0$ den Wert 1 ebenso wie die Determinante D_m, aus der sie durch Vertauschung von m mit $m-1$ hervorgeht.

Die Gleichung (6) ist aber auch von keinem der b_r frei. Enthielte sie b_r nicht, so wäre die Determinante D_r für alle x in der Umgebung von x_0 identisch null, was auch ausgeschlossen ist.

Ebensowenig kann es geschehen, daſs die Konstanten in (6) nur in weniger als $n-m$ Verbindungen vorkommen, so daſs die Gleichung in Wahrheit nur weniger als $n-m$ willkürliche Konstante enthielte, wie dies z. B. der Fall wäre, wenn alle b in ihr nur in der Verbindung

$$b_m + b_{m+1} + \cdots + b_{n-1}$$

erschienen, die nur als eine einzige Konstante zählte. Es genügt, um dies einzusehen, diese Verbindungen selbst an Stelle einer entsprechenden Zahl von b's als neue Variabele einzuführen und die eben gemachten Schlüsse auf die so neu eingeführten willkürlichen Konstanten zu übertragen. Wir nennen daher die erhaltene Gleichung (6) das *vollständige*

intermediäre Integral m^{ter} Ordnung und erkennen, wenn wir wieder

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \ldots y_n = y^{(n-1)}$$

setzen:

Jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die den Voraussetzungen des Existenztheorems genügt, besitzt ein vollständiges intermediäres Integral von jeder Ordnung m zwischen 0 und $n-1$. Ein solches ist dadurch charakterisiert, daſs es eine Differentialgleichung genau m^{ter} Ordnung

$$\Phi(x, y, y', \ldots y^{(m)}, b_m, \ldots b_{n-1}) = 0$$

mit $n-m$ wesentlichen Konstanten $b_m, \ldots b_{n-1}$ darstellt, welche die gegebene Differentialgleichung für willkürliche Werte dieser Konstanten erfüllt.

Irgend eine Lösung, welche aus einer vollständigen Lösung durch Spezialisierung der willkürlichen Konstanten hervorgeht, heiſst eine *partikulare.* Ist dies nicht der Fall, so heiſst sie eine *singuläre.* In demselben Sinne spricht man von partikularen und singulären Integralen. Für die singulären Lösungen muſs das Existenztheorem versagen, also — soweit die Funktionen regulär bleiben —

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

identisch in x verschwinden.

735. Singuläre Lösungen. Den Betrachtungen des § 3 entsprechend, beschränken wir uns bei den singulären Lösungen von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf diejenigen zweiter Ordnung. Dabei können wir uns sehr kurz fassen; denn es handelt sich nur um die Anwendung des § 3 auf ein spezielles System. Der Differentialgleichung 2ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1a}$$

ist nämlich äquivalent das System:

$$\begin{cases} f(x, y, z, y', z') = F(x, y, y', z') = 0 \\ g(x, y, z, y', z') = \qquad\qquad y' - z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Die Gleichung (3) der Nr. 728 reduziert sich — wie wir auch bereits aus dem Vorhergehenden schlieſsen können — auf:

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \tag{3a}$$

Sie hat mit (1a) zusammengenommen im allgemeinen eine Gleichung zwischen x, y, y' zur Folge,

$$\Omega(x, y, y') = 0,$$

die aus der Gleichung der Diskriminantenfläche entsteht, wenn man z durch y' ersetzt. Geometrisch bedeutet diese Gleichung, daſs aus den ∞^3 Linienelementen (x, y, y') der xy-Ebene eine Schar von ∞^2 Linienelementen herausgehoben wird, die sich durch Projektion der ∞^2 Linienelemente des Systemes (1) ergeben, mit denen die Diskriminantenfläche besetzt ist.

Die Bedingungen für die Existenz singulärer Lösungen des Systemes (1), (vergl. die Gleichungen (5) der Nr. 728), reduzieren sich auf die eine:

$$\text{(5a)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0.$$

Sie drückt die Forderung aus, daſs die Schar von ∞^2 Linienelementen

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

ein im allgemeinen singuläres erstes Integral darstellt. Sie bestimmt jedoch nur dann y'', wenn nicht $\frac{\partial F}{\partial y'}$ auch noch verschwindet. Ist dies der Fall, so muſs man noch weiter differentiieren, um die Bedingung dafür zu erhalten, daſs y'' der Gleichung (1a) genügt, also dafür, daſs $\Omega = 0$ ein Integral von (1a) ist.

Sei

$$\text{(2a)} \qquad \Phi(x, y, a, b) = 0$$

ein vollständiges Integral von (1a). Dann wird die vollständige Lösung von (1) durch die Gleichungen

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \Phi &= \Phi(x, y, a, b) = 0 \\ \Psi &= \Psi(x, y, z, a, b) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} z = 0 \end{aligned}$$

gegeben. Diese spezielle Form erhalten also die allgemeinen Gleichungen (2) der Nr. 729 in unserem Falle.

Sei nun

$$\Omega(x, y, z) = 0$$

die Brennfläche der Kongruenz, welche die Integralkurven des Systemes (1) definieren. Wird sie von den Integralkurven (2)

wirklich berührt, und stellt sie nicht einen Ort singulärer Punkte für diese dar, so „erfüllt" die Gleichung

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

unsere Differentialgleichung (1a) in dem früher definierten Sinne, sie ist ein erstes Integral von ihr.

Einer Fläche, welche ∞^1 Integralkurven des Systemes (1) zusammenfaßt, entspricht bei der Differentialgleichung (1a) ein partikulares erstes Integral. Die Gleichung

$$\Omega(x, y, y') = 0,$$

die wir eben abgeleitet haben, definiert also die Einhüllende einer Schar von ∞^1 partikularen ersten Integralen von (1a). Dabei folgt aus der Nr. 729, daß wir jedesmal zu demselben singulären Integrale $\Omega = 0$ kommen, ganz gleichgiltig, welche einfach unendliche Schar von ersten Integralen wir zu seiner Bestimmung benutzt haben.

Die Gleichung $\Omega = 0$ ist selbst wieder eine Differentialgleichung erster Ordnung. Jede *partikulare* Lösung von ihr ist auch eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (1a); denn da sie — wie wir annehmen — (1a) erfüllt, so befriedigen die aus:

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \cdot y'' = 0$$

berechneten Werte y' und y'' die Gleichung (1a) identisch für beliebige x, y. Dieser Schluß versagt aber für die *singuläre* Lösung von $\Omega = 0$, wenn eine solche vorhanden ist. Denn für eine solche verschwindet $\frac{\partial \Omega}{\partial y'}$ ebenso wie

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y'$$

nach Nr. 666 längs der ganzen Kurve, man kann also y'' gar nicht aus der eben hingeschriebenen Gleichung berechnen. Die singuläre Lösung eines singulären Integrals braucht also keine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung zu sein. Wir erläutern dies durch ein Beispiel.

736. Ein Beispiel von Lagrange. Wir behandeln die Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad \varphi = y - ax^2 - bx - 4a^2 - b^2 = 0,$$

welche Lagrange in seinen *Leçons sur le calcul des fonctions* betrachtet hat; a und b sind zwei willkürliche Konstanten. Aus derselben folgt:

$$\text{(2)} \qquad \frac{dy}{dx} - 2ax - b = 0.$$

Die Elimination von b ergiebt:

$$\text{(3)} \quad \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y\right] - a\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right) + 4a^2(1 + x^2) = 0,$$

und die Elimination von a:

$$\text{(4)} \quad \left[2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3\frac{dy}{dx} - 2yx^2\right] - b\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right) + 2b^2(1 + x^2) = 0.$$

Ferner liefert die Gleichung (2):

$$\text{(5)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2a = 0,$$

also

$$a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Trägt man diesen Wert von a in die Gleichung (3) ein, so wird:

$$\text{(6)} \quad F = (1 + x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Die Gleichung (6) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Gleichungen (3) und (4) sind ihre ersten Integrale, die Gleichung (1) ihr vollständiges. Drückt man die Bedingung aus, daſs die Wurzeln a der Gleichung (3) oder die Wurzeln b der Gleichung (4) gleich werden, so findet man das singuläre Integral der Gleichung (6), nämlich:

$$\text{(7)} \qquad \Omega = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - (1 + x^2)y - \frac{x^4}{16} = 0.$$

Will man diese Gleichung (7) aus der Differentialgleichung (6) gewinnen, so hat man diese letztere zu differentiieren; man erhält:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4}\right] = 0.$$

Setzt man den Koeffizienten von $\frac{d^3y}{dx^3}$ gleich null, so folgt:

$$(8) \qquad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4} = 0;$$

endlich ergiebt die Elimination von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus den Gleichungen (6) und (8) die Gleichung (7), welche wir vermittelst der ersten Integrale bestimmt haben.

Löst man die Gleichung (7) nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+x^3}{4} + \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{16y+4x^2+x^4}}{4},$$

was man auch schreiben kann:

$$\frac{8\frac{dy}{dx}+4x+2x^3}{\sqrt{16y+4x^2+x^4}} - 2\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Der erste Teil der linken Seite ist die Ableitung von

$$\sqrt{16y+4x^2+x^4},$$

während der zweite Teil

$$2\sqrt{1+x^2}$$

die Ableitung von

$$x\sqrt{1+x^2} + l(x+\sqrt{1+x^2})$$

ist. Also erhält man das singuläre erste Integral (7) durch Differentiation der Gleichung:

$$(9) \quad \sqrt{16y+4x^2+x^4} - x\sqrt{1+x^2} - l(x+\sqrt{1+x^2}) = H,$$

wobei H eine willkürliche Konstante bezeichnet, d. h. die Gleichung (9) ist das vollständige Integral dieser singulären Lösung.

Für irgend einen Wert der Konstanten H stellt die Gleichung (9) zugleich ein Integral der Differentialgleichung (6) dar. Aufserdem hat aber die intermediäre Gleichung (7) noch das singuläre Integral:

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0, \quad \text{also} \quad y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}.$$

Dieser Wert von y befriedigt zwar die Gleichung (7), aber nicht die Gleichung (1).

737. Eine besondere Klasse von Differentialgleichungen. Zum Schlusse dieses Kapitels will ich nur noch einige summarische Bemerkungen über eine Klasse von Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung anführen, welche zuerst von Lagrange behandelt worden sind und deren Theorie ausführlich in einer Abhandlung im 18. Bande des *Journal de Mathématiques pures et appliquées* von mir entwickelt worden ist.

Es seien x, y zwei Variabele, y', y'', ... die successiven Ableitungen von y, α und β zwei willkürliche Konstanten. Wenn die beiden Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x,\, y,\, y',\, \ldots\, y^{(n)}) = \alpha, \\ \psi(x,\, y,\, y',\, \ldots\, y^{(n)}) = \beta \end{cases}$$

zwei erste Integrale derselben Differentialgleichung $V = 0$ sind und aus denselben durch Elimination von $y^{(n)}$ eine Gleichung:

$$(2)\qquad f(x,\, y,\, y',\, \ldots\, y^{(n-1)},\, \alpha,\, \beta) = 0$$

folgt, so ist diese letzte ein zweites Integral der Gleichung $V = 0$. Die nämliche Gleichung (2) ist nun ein erstes Integral der Gleichung:

$$(3)\qquad F(\varphi,\, \psi) = 0,$$

wobei F eine beliebige Funktion bezeichnet, wenn man in jener α und β als Konstante betrachtet, die untereinander durch die Gleichung:

$$(4)\qquad F(\alpha,\, \beta) = 0$$

verbunden sind. Denn wenn man die Gleichung (2) und die aus derselben durch Differentiation abgeleitete nach α und β auflöst, so findet man nach unserer Annahme

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi,$$

und weil man voraussetzt, daſs α und β durch die Gleichung (4) verbunden sind, so ist klar, daſs die Gleichung (3) befriedigt ist.

Um nun das singuläre Integral der Gleichung (3) zu erhalten, kann man ihr erstes Integral (2) anwenden. Setzen wir voraus, daſs dieses Integral auf solch eine Form gebracht ist, daſs die Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ nicht unendlich werden kann, so genügt es, die Gleichung (2) nach der willkürlichen Kon-

stanten α zu differentiieren, indem man dabei β als Funktion von α ansieht; alsdann folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Andererseits ergiebt die Gleichung (4):

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

und hieraus folgt durch Elimination von $\frac{d\beta}{d\alpha}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist das gesuchte singuläre Integral.

Wir empfehlen dem Leser, sich diese Entwickelungen für den Fall $n = 1$ auf Grund der in Nr. 735 gegebenen Auseinandersetzungen auch geometrisch klar zu machen.

738. Erstes Beispiel. *Es soll eine ebene Kurve bestimmt werden, wenn die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte, ihre Evolute, gegeben ist.*

Bezeichnet man mit x, y die Koordinaten der gesuchten Kurve, mit α, β die der Krümmungsmittelpunkte, so ist (Nr. 198):

$$\alpha = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}, \quad \beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{1}$$

Ist also:

$$F(\alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der gegebenen Kurve, so ist die Differentialgleichung des Problemes:

$$F\left[x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}, \quad y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right] = 0; \tag{3}$$

sie ist von der zweiten Ordnung. Betrachtet man aber α und β als willkürliche Konstanten, so sind die Gleichungen (1) zwei erste Integrale der nämlichen Gleichung dritter Ordnung:

$$\left(1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Man hat hier also den im vorigen Paragraphen behandelten Fall. Eliminiert man $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwischen den Gleichungen (1), so erhält man:

$$(5) \qquad (\alpha - x) + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung ist ein erstes Integral der Gleichung (5), wenn α und β zwei Konstanten sind, die miteinander durch die Gleichung (2) verbunden sind. Die linke Seite der Gleichung (5) ist bis auf einen konstanten Faktor die Ableitung von

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2;$$

bezeichnet man also mit R eine neue willkürliche Konstante, so ist das vollständige Integral der Gleichung (3):

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

α und β sind durch die Gleichung (2) verbunden. Die vollständige Lösung des vorgelegten Problemes ist also gegeben durch einen Kreis mit willkürlichem Radius, dessen Mittelpunkt ein willkürlicher Punkt der gegebenen Kurve ist. Im Sinne der Geometrie aber ist dieses nicht die eigentliche Lösung, vielmehr ist diese nichts anderes als das singuläre Integral der Gleichung (3). Um dieses zu erhalten, mufs man die Gleichung (5) differentiieren, indem man α und β als die einzigen Variabelen betrachtet. Dies ergiebt:

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Der Quotient $\frac{d\beta}{d\alpha}$ mufs aus der Gleichung (1) berechnet werden. Diese Gleichung (6), welche nur von der ersten Ordnung ist, mufs man ansetzen, wenn man die Evolventen der gegebenen Kurve bestimmen will.

739. Zweites Beispiel. *Es sollen die Krümmungskurven einer Fläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt gefunden werden.*

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1.$$

Die Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungskurven auf die xy-Ebene wird dann, wenn man $dy = y'dx$ setzt (Nr. 339):

$$(2) \qquad \frac{c^2}{\varrho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) - \frac{c^2-b^2}{\varrho^2-b^2}(y^2 - xyy') - b^2 = 0,$$

oder:

$$(3) \qquad \alpha - \beta - b^2 = 0,$$

indem man

$$(4) \qquad \frac{c^2}{\varrho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) = \alpha, \quad \frac{c^2-b^2}{\varrho^2-b^2}(y^2 - xyy') = \beta$$

einführt. Betrachtet man nun α und β als willkürliche Konstanten, so ergeben diese beiden Gleichungen übereinstimmend durch Differentiation:

$$xyy'' - yy' + xy'^2 = 0;$$

sie sind also die zwei ersten Integrale dieser Differentialgleichung, und folglich kann man auf die Gleichung (2) das Theorem der Nr. 737 anwenden. Eliminiert man y' zwischen den Gleichungen (4), so folgt:

$$\frac{c^2}{\varrho^2}\frac{x^2}{\alpha} + \frac{c^2-b^2}{\varrho^2-b^2}\frac{y^2}{\beta} = 1;$$

da α und β durch die Gleichung (3) verbunden sind, so setzen wir $\alpha = \mu^2$, $\beta = \mu^2 - b^2$, und die Gleichung der Projektionen der Krümmungskurven wird schliefslich:

$$(5) \qquad \frac{c^2x^2}{\varrho^2\mu^2} + \frac{(c^2-b^2)y^2}{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)} = 1,$$

wobei μ^2 die willkürliche Konstante ist.

Da diese Gleichung in Bezug auf ϱ und μ symmetrisch ist, so stellt sie auch, wenn man ϱ als einen variabelen Parameter und μ als eine bestimmte Gröfse betrachtet, die Projektionen der Krümmungskurven der Fläche:

$$(6) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-b^2} + \frac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1$$

dar; und wenn man gleichzeitig den Gröfsen ϱ und μ bestimmte Werte beilegt, so repräsentiert die Gleichung (5) die Projektion einer Krümmungskurve, die den Flächen (1) und (6) gemeinsam ist, die also den Durchschnitt dieser beiden Flächen bildet.

Wenn in der Gleichung (1) $\varrho > c > b$ angenommen wird, so muſs μ zwischen c und b gelegen, oder kleiner als b sein, damit die beiden Flächen sich schneiden. Hieraus schlieſst man, daſs die drei Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 + c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

in denen b und $c > b$ bestimmte Konstanten, ϱ, μ, ν drei variabele Parameter sind, ϱ zwischen ∞ und c, μ zwischen c und b, ν zwischen b und 0, ein System von drei Flächenfamilien darstellen, so daſs jede Fläche der einen Familie von allen Flächen der beiden anderen in ihren Krümmungskurven geschnitten wird, eine Eigenschaft, welche wir vermittelst des Dupinschen Theorems bereits bewiesen haben (Nr. 332).

740. Drittes Beispiel. Die bereits in Nr. 711 erledigte Clairautsche Gleichung:

$$y = x \cdot \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

gehört auch zu der hier behandelten Klasse; denn die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad y - x\frac{dy}{dx} = \beta,$$

in denen α und β willkürliche Konstanten sind, sind die ersten Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Eliminiert man $\frac{dy}{dx}$, so erhält man:

$$y = \alpha x + \beta,$$

und dies ist das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung, wenn man dabei zwischen α und β die Gleichung

$$\beta = f(\alpha)$$

annimmt. Das singuläre Integral erhält man durch Elimination von α aus den Gleichungen:

$$y = \alpha x + f(\alpha), \quad 0 = x + f'(\alpha).$$

Viertes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnung.

§ 1. Einfache Fälle.

741. Wiederholte Quadraturen. Alle Fälle der gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich, wie wir sahen, wie grofs auch die Zahl der Variabelen sein mag, auf den Fall einer Differentialgleichung von bestimmter Ordnung zwischen zwei Variabelen zurückführen. Nachdem wir die bekannteren Resultate aus der Theorie der Gleichungen erster Ordnung entwickelt haben, müssen wir nun Gleichungen höherer Ordnung betrachten. Sieht man aber hierbei von den *linearen* Gleichungen ab, die wir zum Gegenstand besonderer Untersuchung im nächsten Kapitel machen werden, so haben wir für diese Theorie kein allgemeines Prinzip, keine Methode der Integration, und die folgenden Entwickelungen sind daher auf eine sehr kleine Zahl spezieller Fälle beschränkt.

Wir verweilen zunächst bei dem einfachsten Fall, wo eine Ableitung bestimmter Ordnung der unbekannten Funktion gegeben ist. Hier hängt die auszuführende Integration nur von Quadraturen ab. Es sei also

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X \tag{1}$$

die gegebene Gleichung, X eine bekannte Funktion von x allein, man soll das vollständige Integral bestimmen. Wir bezeichnen mit $y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)}$ die Werte, welche y und seine $n-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ annehmen sollen.

Multipliziert man dann die Gleichung (1) mit dx, so folgt durch Integration

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} X dx + y_0^{(n-1)} = X_1 + y_0^{(n-1)}.$$

Integriert man sodann diese Gleichung, so erhält man:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} X_1 dx + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)}$$

$$= X_2 + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)}.$$

Fährt man in derselben Weise fort, so erhält man schliefslich

$$y = X_n + P_{n-1},$$

wobei

$$P_{n-1} = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{1}{2!}y''_0(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}y_0^{(n-1)}(x - x_0)^{n-1}$$

ist und X_n das $n+1^{\text{te}}$ Glied in der Reihe $X, X_1, X_2, \ldots X_n$ bezeichnet. Diese Funktionen werden von der zweiten an für $x = x_0$ null, und jede von ihnen ist die Ableitung der folgenden; also ist

$$X_n = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} X dx. \tag{2}$$

Die Anzahl der auszuführenden Integration ist gleich n.

Durch die teilweise Integration läfst sich indessen diese Formel so transformieren, dafs die Berechnung von X_n nur eine einzige Quadratur erfordert; es ist

$$X_1 = \int_{x_0}^{x} X dx \quad \text{und ebenso} \quad X_2 = \int_{x_0}^{x} X_1 dx. \tag{3}$$

Die teilweise Integration verwandelt nun den Ausdruck für X_2 in den folgenden

$$X_2 = x X_1 - \int_{x_0}^{x} \frac{dX_1}{dx} x dx = x \int_{x_0}^{x} X dx - \int_{x_0}^{x} X x dx,$$

oder wenn wir die Variabele unter dem Integral, also auch in der Funktion X, mit z bezeichnen:

$$X_2 = \int_{x_0}^{x} (x - z) X dz. \tag{4}$$

Bezeichnet man die Variabele in der Funktion X_2 mit t, so ist:

$$X_3 = \int_{x_0}^{x} X_2 dt = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} (t - z) X dz,$$

wobei in X an Stelle von x die Variabele z zu schreiben ist. Kehrt man in diesem zweifachen Integrale die Reihenfolge der Integrationen um, so wird (Nr. 577):

$$X_3 = \int_{x_0}^{x} X dz \int_{z}^{x} (t - z) dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x - z)^2 X dz. \tag{5}$$

Ebenso folgt weiter, wenn man die Variabele in X_3 mit t bezeichnet:

$$X_4 = \int_{x_0}^{x} X_3 dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} (t - z)^2 X dz = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} X dz \int_{z}^{x} (t - z)^2 dz,$$

also:

$$X_4 = \frac{1}{3!} \int_{x_0}^{x} (x - z)^3 X dz. \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen läſst sich schlieſsen, daſs X_n von der Form

$$X_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - z)^{n-1} X dz \tag{7}$$

sein wird, und diese Gleichung bestätigt man durch Schluſs von n auf $n+1$, denn es wird wie vorhin, wenn wir mit t die Variabele in X_n bezeichnen:

$$X_{n+1} = \int_{x_0}^{x} X_n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} (t-z)^{n-1} X dz = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} X dz \int_{z}^{x} (t-z)^{n-1} dt,$$

also:

$$X_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - z)^n X\,dz.$$

Mithin ist das vollständige Integral der Gleichung (1):

$$(8) \qquad y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - z)^{n-1} X\,dz + P_{n-1};$$

P_{n-1} ist ein willkürliches Polynom in x vom Grade $n-1$.

Dabei ist zu bemerken, daſs wir unter dem vollständigen Integrale der Gleichung (6) eine um x_0 reguläre Funktion von x verstehen, deren $n-1$ erste Ableitungen ebenfalls regulär sind, deren n^{te} Ableitung den gegebenen Wert X hat, und welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für den gegebenen Wert x_0 von x die beliebig gegebenen Werte $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ annimmt.

742. Neuer Beweis des Taylorschen Satzes. Nehmen wir an, daſs die Funktion X die n^{te} Ableitung $f^{(n)}(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist, so ist evident, daſs die Gleichung

$$y = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \cdots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)$$

ein Integral der Gleichung (1) von der Beschaffenheit ist, daſs y und seine $n-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ null werden. Dasselbe Integral ist aber auch durch die obige Gleichung (8) dargestellt, wenn man daselbst $X = f^{(n)}(z)$ und P_{n-1} gleich null setzt. Also ist:

$$f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \cdots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - z)^{n-1} f^{(n)}(z)\,dz,$$

oder wenn man $x = x_0 + h$ und $z = x_0 + h - t$ unter dem Integral setzt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h t^{n-1}f^{(n)}(x_0+h-t)\,dt.$$

Auf diese Weise erhalten wir einen neuen Beweis der Taylorschen Gleichung (Nr. 425).

743. Gleichungen zwischen y' und y'' allein. Wir betrachten zuerst eine Gleichung von der Form:

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

oder

$$F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0, \tag{2}$$

indem wir $\frac{dy}{dx} = p$ einführen. Kann man die Gleichung nach $\frac{dp}{dx}$ auflösen, und wird:

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{f(p)}, \tag{3}$$

so erhält man:

$$x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} + C. \tag{4}$$

Kann man ferner diese Gleichung nach p auflösen, so dafs

$$p = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad dy = \varphi(x)dx$$

wird, so folgt:

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx + C'; \tag{5}$$

C' ist eine zweite willkürliche Konstante, und die Gleichung (6) ist das vollständige Integral der gegebenen.

Dieses Integral läfst sich aber auch auf folgendem Wege ableiten, der immer anwendbar ist, auch wenn die Gleichung (4) nicht nach p aufgelöst werden kann. Multipliziert man die Gleichung (3) mit p, so folgt

$$p\,dx = dy = \frac{p\,dp}{f(p)},$$

also

$$(6) \qquad y = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{f(p)} + C_1.$$

Das vollständige Integral ergiebt sich dann vermittelst der Elimination von p aus den Gleichungen (4) und (6).

Kann man die Gleichung (2) nicht nach $\frac{dp}{dx}$ auflösen, dagegen die Auflösung nach p vollziehen, so erhält man das Integral auf folgendem Wege. Wir setzen

$$\frac{dp}{dx} = q$$

und nehmen an, daſs die gegebene Gleichung die Form

$$(7) \qquad p = \varphi(q)$$

erhält. Dann wird

$$dp = \varphi'(q)\,dq,$$

also weil

$$dx = \frac{dp}{q}, \quad dy = \frac{p\,dp}{q}$$

ist:

$$dx = \frac{\varphi'(q)}{q}\,dq, \quad dy = \frac{\varphi(q)\varphi'(q)}{q}\,dq.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$(8) \qquad x = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)}{q}\,dq + C, \quad y = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi(q)\varphi'(q)}{q}\,dq + C_1.$$

Das gesuchte Integral ergiebt sich aus der Elimination von q zwischen diesen beiden Gleichungen.

Nehmen wir schlieſslich an, daſs die gegebene Gleichung weder nach p, noch auch nach q aufgelöst werden kann, daſs man aber p und q als Funktionen einer neuen Variabelen dargestellt hat, derart, daſs

$$(9) \qquad p = \psi(t), \quad q = \chi(t)$$

ist, so folgt hieraus

$$dp = \psi'(t)\,dt,$$

und die Gleichungen

$$dx = \frac{dp}{q}, \quad dy = \frac{p\,dp}{q}$$

werden also:

$$dx = \frac{\psi'(t)}{\chi(t)} dt, \quad dy = \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\chi(t)} dt,$$

so daſs das gesuchte Integral aus den beiden Gleichungen erhalten wird:

$$(10) \qquad x = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(t)}{\chi(t)} dt + C, \quad y = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\chi(t)} dt + C_1.$$

744. Ein Beispiel. *Es soll die ebene Kurve bestimmt werden, deren Krümmungsradius eine Projektion von konstanter Länge auf eine feste Richtung liefert.*

Der Krümmungsradius hat bei rechtwinkligen Koordinaten den Wert

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und der Kosinus des Winkels, den seine Richtung mit der x-Achse bildet, ist

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Wählen wir also die gegebene feste Richtung zur x-Achse, so ist die Gleichung des Problems

$$\frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a,$$

wobei a die gegebene Länge bedeutet. Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(1 + p^2)}{a},$$

also:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dp}{p(1 + p^2)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1 + p^2},$$

$$\frac{dy}{a} = \frac{dp}{1 + p^2}.$$

Integriert man diese und bezeichnet mit x_0, y_0 willkürliche Konstanten, so folgt:

$$\frac{x-x_0}{a} = l\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{y-y_0}{a} = \operatorname{arc\,tang} p,$$

und die Elimination von p ergiebt:

$$\frac{x-x_0}{a} = l \quad \sin\frac{y-y_0}{a}.$$

745. Gleichungen zwischen $y^{(n)}$ und $y^{(n+1)}$ allein. Wir betrachten nun die allgemeinere Differentialgleichung:

(1)
$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

die sich für

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = p$$

auf die Form

(2)
$$F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0$$

reduziert. Nehmen wir an, daſs diese Gleichung nach $\frac{dp}{dx}$ aufgelöst ist, so daſs

(3)
$$\frac{dp}{dx} = f(p)$$

wird, so folgt durch Integration:

(4)
$$x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} + C.$$

Kann dann diese Gleichung nach p aufgelöst werden, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$p = X \quad \text{oder} \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = X,$$

wobei X eine gegebene Funktion von x mit einer willkürlichen Konstante ist. Dies ist der in Nr. 741 behandelte Fall.

Kann aber die Gleichung (4) nicht nach p aufgelöst werden, so hat man gemäſs der Gleichung (3):

$$d\,\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{f(p)},$$

also:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{f(p)} + C_1.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{f(p)},$$

so kann man diese Gleichung schreiben:

$$d\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = (P + C_1)dx = \frac{P\,dp}{f(p)} + C_1\,dx,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^{p} \frac{P\,dp}{f(p)} + C_1 x + C_2;$$

fährt man so fort, so erhält man den Wert von y durch Quadraturen.

746. Gleichungen zwischen y und y'' allein. Bei mechanischen Problemen ist sehr häufig die Kraft oder die Beschleunigung eines Punktes als Funktion seiner Koordinaten gegeben. Es besteht also für den Fall der geradlinigen Bewegung zwischen beiden eine Gleichung. Bezeichnen wir die Zeit mit x, den Weg mit y, so ist also:

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\ y\right) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Läßt sich die Gleichung nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ auflösen, so daß

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \tag{2}$$

wird, so erhält man durch Multiplikation mit dy:

$$dy\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)\,dy.$$

Die linke Seite ist das Differential von $\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; folglich ist,

wenn C eine willkürliche Konstante und y_0 irgend ein Anfangswert von y bezeichnet:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + \frac{1}{2}C. \tag{3}$$

Hieraus folgert man:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + C}},$$

und ferner, da die Variabelen getrennt sind:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + C}} + C'.$$

Dies ist das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung (2).

Im Falle des oben betrachteten mechanischen Problems heifst die linke Seite von (3) „die lebendige Kraft des bewegten Punktes“ (wenn wir seine Masse gleich 1 setzen) und die rechte Seite die von ihm geleistete Arbeit. Die Gleichung (3) drückt daher das „Princip von der Erhaltung der Kraft“ in dem einfachsten Falle aus.

Ist die ursprüngliche Gleichung nach y auflösbar, so setzen wir:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \tag{4}$$

und es sei

$$y = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \varphi(q) \tag{5}$$

die aufgelöste Gleichung. Die Differentiation ergiebt:

$$dy = \varphi'(q)\,dq;$$

andererseits ist nach den Gleichungen (4)

$$dy = \frac{p\,dp}{q},$$

also:

$$p\,dp = q\varphi'(q)\,dq.$$

Mithin wird

(6) $$p^2 = 2\int_{q_0}^{q} q\varphi'(q)dq + C,$$

also:

$$p = \sqrt{2\int_{q_0}^{q} q\varphi'(q)dq + C}.$$

Die Gleichung

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(q)dq}{p}$$

wird folglich:

$$dx = \frac{\varphi'(q)dq}{\sqrt{2\int_{q_0}^{q} q\varphi'(q)dq + C}},$$

also:

(7) $$x = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)dq}{\sqrt{2\int_{q_0}^{q} q\varphi'(q)dq + C}} + C_1.$$

Das gesuchte Integral ist das Resultat der Elimination von q zwischen den Gleichungen (5) und (7).

747. Anwendung auf das Problem der freien Schwingungen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - my = 0$$

ergiebt:

$$2\frac{d^2y}{dx}\frac{dy}{dx} - 2my\frac{dy}{dx} = 0,$$

also:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m(y^2 + C);$$

ferner

$$\sqrt{m}dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2+C}}.$$

Mithin wird:

$$x\sqrt{m} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2+C}} + \text{const.} = l(y + \sqrt{y^2 + C}) - lC';$$

C' ist hier eine Konstante. Man hat also:

$$y + \sqrt{y^2 + C} = C' e^{x\sqrt{m}},$$

und indem man von beiden Seiten den reziproken Wert bildet:

$$-y + \sqrt{y^2 + C} = \frac{C}{C'} e^{-x\sqrt{m}}.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorigen, und schreibt man statt $\frac{C'}{2}$ und $\frac{-C}{2C'}$ einfach C und C', so folgt:

$$y = Ce^{x\sqrt{m}} + C'e^{-x\sqrt{m}},$$

und dies ist das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung. Ist die Kraft eine anziehende, also m eine negative Zahl, gleich $-n^2$, so kann man schreiben:

$$y = C\frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} + C'\frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

oder:

$$y = C \cos nx + C' \sin nx;$$

C und C' bezeichnen auch hier willkürliche Konstanten. Man kann auch

$$C = A \cos \alpha, \quad C' = -A \sin \alpha$$

setzen; alsdann wird das Integral:

$$y = A \cos (nx + \alpha),$$

und A und α sind die willkürlichen Konstanten. Der Punkt vollführt also einfache Sinusschwingungen.

748. Gleichungen zwischen $y^{(n-2)}$ und $y^{(n)}$ allein. Auf den in Nr. 746 behandelten Fall läßt sich die Gleichung

$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = 0 \tag{1}$$

zurückführen, welche nur die Ableitungen $\frac{d^n y}{dx^n}$ und $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$ enthält. Dazu hat man nur

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = p \tag{2}$$

zu setzen, so wird die Differentialgleichung:

$$F\left(\frac{d^2 p}{dx^2}, p\right) = 0. \tag{3}$$

Die Bestimmung von p als Funktion von x enthält keine anderen Schwierigkeiten als die der Elimination und beruht, wie wir gesehen haben, im übrigen auf Quadraturen.

Nehmen wir an, daſs die Gleichung (3) nach $\frac{d^2p}{dx^2}$ auflösbar ist, so daſs

$$\frac{d^2p}{dx^2} = f(p) \tag{4}$$

wird, so erhält man:

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2\int_{p_0}^{p} f(p)dp + C} = \psi(p),$$

ferner:

$$x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\psi(p)} + C'. \tag{5}$$

Kann diese Gleichung nach p aufgelöst werden, so läſst sich y vermittelst der Gleichung (2) durch Quadraturen bestimmen (Nr. 741). Ist diese Auflösung aber nicht ausführbar, so hat man wie vorhin (Nr. 745) zu verfahren; es ist:

$$d\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{\psi(p)},$$

also:

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{\psi(p)} + C_1 = P + C_1.$$

Daraus folgt weiter:

$$d\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = (P + C_1)dx = \frac{P\,dp}{\psi(p)} + C_1\,dx,$$

also:

$$\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = \int_{p_0}^{p} \frac{P\,dp}{\psi(p)} + C_1x + C_2.$$

Auf diese Weise fortfahrend gewinnt man den Wert von y als Funktion von p durch Quadraturen.

749. Fälle, in denen sich die Ordnung der Differentialgleichung erniedrigt. Die Ordnung einer Differentialgleichung

läßt sich immer erniedrigen, wenn die Gleichung nicht die unbekannte Funktion, sondern nur ihre Ableitungen enthält. Denn ist die gegebene Gleichung von der Form:

$$F\left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

wobei $\frac{d^m y}{dx^m}$ die Ableitung niedrigster Ordnung bezeichnet, welche hier auftritt, so folgt, indem man

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p$$

setzt, eine Differentialgleichung von der Ordnung $n - m$, nämlich:

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \cdots \frac{d^{n-m} p}{dx^{n-m}}\right) = 0.$$

Ist der Wert der Funktion hieraus ermittelt, so erhält man y durch Quadraturen.

Zweitens kann man aber auch die Ordnung stets um eine Einheit erniedrigen, wenn die unabhängige Variabele nicht explicite vorkommt. Denn wählt man in der Gleichung n^{ter} Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

y zur unabhängigen Variabelen, so wird man auf den vorigen Fall zurückgeführt. Setzt man also:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so erhält man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = p \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und nach Substitution dieser Werte reduziert sich die Gleichung auf die $n - 1^{\text{te}}$ Ordnung. Ist dann der Wert von p als Funktion von y bekannt, so ist x aus der Gleichung

$$dx = \frac{dy}{p}$$

zu bestimmen, was nur noch eine Quadratur erfordert.

750. Gleichungen, die in y und seinen Ableitungen homogen sind. Ist die Gleichung

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

homogen in Bezug auf

$$y,\, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n},$$

so kann man ihre Ordnung um eine Einheit erniedrigen vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

wobei z eine neue unbekannte Funktion von x ist. Denn es folgt hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \ldots$$

und nach der Substitution dieser Werte läſst sich die Exponentialfunktion als Faktor absondern, da die Gleichung in Bezug auf

$$y,\, \frac{dy}{dx} \cdots$$

homogen ist. Man erhält sonach eine Differentialgleichung für z:

$$\Phi\left(x,\, z,\, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

von der Ordnung $n-1$. Ist der Wert von z bekannt, so findet man y durch eine Quadratur, wobei noch eine willkürliche Konstante auftritt.

Auf diesen Fall läſst sich auch eine Differentialgleichung

$$F\left(y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

zurückführen, welche die unabhängige Variabele x nicht enthält und in Bezug auf

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}},\quad \frac{\frac{d^3 y}{dx^3}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \cdots$$

homogen ist. Denn setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \cdots$$

und nach der Substitution dieser Werte erhält man eine Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, die in Bezug auf

$$p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \cdots$$

homogen ist und die sich folglich auf die Ordnung $n-2$ reduzieren läfst.

751. Gleichungen zweiter Ordnung, die in x, y und den Differentialen homogen sind. Es sei

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung zweiter Ordnung, die homogen ist, wenn man die Dimensionen von x und y gleich 1, von $\frac{dy}{dx}$ gleich 0, von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich -1 annimmt. Setzt man dann:

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{x}, \tag{2}$$

so wird die Gleichung nach Substitution dieser Werte die Variabele x nicht mehr enthalten, und also von der Form

$$f(u, p, q) = 0 \tag{3}$$

sein.

Die Gleichungen (2) ergeben:

$$dy = u\,dx + x\,du = p\,dx, \quad d^2y = dp\,dx = \frac{q}{x}\,dx^2;$$

also:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{q}. \tag{4}$$

Nehmen wir nun an, dafs man aus der Gleichung (3)

$$q = \varphi(u, p)$$

berechnen kann, so erhält man:

$$\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\varphi(u, p)},$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabelen p und u. Hat man diese Gleichung integriert, so daſs der Wert von p als Funktion von u bekannt ist, so erfordert die Lösung des Problemes nur noch eine Quadratur, denn man erhält die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

in welcher die Variabelen getrennt sind. Es wird also u eine Funktion von x, und sonach $y = ux$.

Ist allgemein die Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

homogen, wenn die Dimension von x und y gleich 1, von $\frac{dy}{dx}$ gleich 0, von $\frac{d^n y}{dx^n}$ gleich $-(n-1)$ gesetzt wird, so läſst sich durch die Transformation:

$$x = e^z, \quad y = ue^z,$$

also:

$$dx = e^z dz, \quad dy = e^z(u dz + du),$$

ferner:

$$\frac{dy}{dx} = \left(u + \frac{du}{dz}\right),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right) e^{-z},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

die Gleichung in eine Differentialgleichung zwischen u und z transformieren, aus welcher e^z herausfällt, die also die Variabele z nicht mehr enthält, und demnach in eine Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung verwandelt werden kann.

§ 2. Geometrische Anwendungen.

752. Erste Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius einer gegebenen Funktion der Abscisse gleich ist.*

Bezeichnet man mit x und y die rechtwinkligen Koordinaten, so ist die Gleichung des Problemes:

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = f(x).$$

Dieselbe enthält die Variabele y nicht und kann auf die erste Ordnung gebracht werden, indem man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

setzt. Alsdann wird:

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{f(x)}.$$

Die Integration ergiebt:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} + C,$$

also:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} + C}{\sqrt{1 - \left[\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} + C\right]^2}} = \varphi(x),$$

und folglich erhält man y durch eine neue Quadratur, nämlich

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + C_1.$$

Hat z. B. $f(x)$ den Wert $\frac{a^2}{2x}$, so wird, wenn man $x_0 = 0$ nimmt und $\frac{c}{a^2}$ an Stelle von C schreibt:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} = \frac{x^2}{a^2}, \quad \varphi(x) = \frac{x^2+c}{\sqrt{a^4-(x^2+c)^2}},$$

ferner:

$$y = \int_{0}^{x} \frac{x^2+c}{\sqrt{a^4-(x^2+c)^2}}\,dx + C_1.$$

Diese Kurve tritt in der Mechanik unter dem Namen „Elastische Kurve“ auf, ihr Krümmungsradius ist der Abscisse umgekehrt proportional.

753. Zweite Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius dem Kubus der Normalen proportional ist.*

Bezeichnet man mit x und y rechtwinklige Koordinaten, mit p die Ableitung $\frac{dy}{dx}$, so haben Krümmungsradius und Normale die Werte:

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}, \quad y\sqrt{1+p^2},$$

und die Gleichung des Problemes ist also:

$$\frac{dp}{dx} = \pm \frac{a^2}{y^3},$$

a ist eine gegebene Länge. Diese Gleichung zweiter Ordnung enthält die Variabele x nicht; man hat also y als unabhängige Variabele zu wählen, und für dx den Wert $\frac{dy}{p}$ zu setzen, so wird:

$$\pm \frac{pdp}{dy} = \frac{a^2}{y^3} \quad \text{oder} \quad \pm pdp = a^2 \frac{dy}{y^3}.$$

Bezeichnet man mit $\frac{1}{n}$ eine willkürliche Konstante, so folgt:

$$p^2 = \pm \frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{n},$$

also:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 \pm na^2}}{y\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad dx = \sqrt{n}\,\frac{ydy}{\sqrt{y^2 \pm na^2}}.$$

Ist dann x_0 eine neue willkürliche Konstante, so erhält man

$$x - x_0 = \sqrt{n}\sqrt{y^2 \pm na^2} \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 - ny^2 = \pm n^2 a^2;$$

die gesuchte Kurve ist also im allgemeinen eine Ellipse oder eine Hyperbel. Für den Fall $\frac{1}{n} = 0$ bekommt man eine Parabel.

754. Dritte Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius proportional der Normalen ist.*

Bezeichnet man mit n eine gegebene positive oder negative Zahl, so wird die Gleichung des Problemes:

$$\frac{1+p^2}{\frac{dp}{dx}} = ny.$$

Wir ersetzen, da x nicht vorkommt, dx durch $\frac{dy}{p}$, so wird:

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} = \frac{2}{n}\,\frac{dy}{y}.$$

Die Integration liefert, wenn c eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$l(1+p^2) = \frac{2}{n}(ly - lc) = l\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}},$$

also:

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1} \quad \text{und} \quad dx = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Die zweite Integration ergiebt:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy,$$

wobei x_0 eine willkürliche Konstante, y_0 einen beliebig fixierten Anfangswert von y bedeutet.

Der Ausdruck für x ist ein binomisches Integral (Nr. 465), und dies Integral läfst sich durch elementare Funktionen darstellen, wenn entweder $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl ist, also wenn n eine ganze Zahl ist. Die bemerkenswertesten Fälle sind hierbei $n = \pm 1$ und $n = \pm 2$.

1. Für $n = -1$ erhält man, indem man $y_0 = c$ setzt:

$$x - x_0 = \int_c^y \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = -\sqrt{c^2 - y^2},$$

also:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = c^2;$$

die gesuchte Kurve ist ein Kreis.

2. Für $n = +1$ ist:

$$\frac{x - x_0}{c} = \int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = l\,\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c},$$

also:

$$\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}=e^{\frac{x-x_0}{c}},$$

und bildet man auf beiden Seiten den reziproken Wert:

$$\frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c}=e^{-\frac{x-x_0}{c}}.$$

Durch Addition folgt:

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{c}}+e^{-\frac{x-x_0}{c}}\right),$$

die gesuchte Kurve ist also eine Kettenlinie (Nr. 225).

3. Ist $n=-2$, so wird:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c-y}{y}},$$

und dies ist die Differentialgleichung einer Cykloide, bei welcher der Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich c ist (Nr. 231).

4. Ist $n=+2$, so hat man:

$$x-x_0=\sqrt{c}\int_c^y\frac{dy}{\sqrt{y-c}}=2\sqrt{c}\sqrt{y-c},$$

also:

$$y-c=\frac{(x-x_0)^2}{4c},$$

und dies ist die Gleichung einer Parabel.

755. Vierte Aufgabe. *Die Rotationsflächen zu bestimmen, für welche die mittlere Krümmung in allen Punkten konstant ist.*

Bei einer Rotationsfläche bilden die Meridiane und die Parallelkreise die beiden Systeme der Krümmungskurven (Nr. 349). Hieraus folgt, daſs der eine Hauptkrümmungsradius der der Meridiankurve ist, während der andere gleich ist der Strecke der Normalen zwischen der Achse und dem Flächenpunkte.

Bezeichnet man also mit R den ersten, mit N den zweiten Krümmungsradius, so ist die Gleichung des Problemes:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{N}=\frac{1}{a};$$

a bezeichnet eine gegebene Länge. In dieser Formel haben R und N gleiche Zeichen oder entgegengesetzte, je nachdem

die Radien von gleicher oder entgegengesetzter Richtung sind. Wir beziehen nun eine Meridiankurve auf zwei rechtwinklige Achsen, von denen die x-Achse mit der Achse der Rotationsfläche zusammenfallen soll. R und N bekommen gleiche Zeichen, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, und umgekehrt. Man mufs also

$$R = -\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

setzen, und das Vorzeichen von

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

in diesen Ausdrücken ist dann willkürlich. Die Gleichung des Problemes wird nun, indem man wiederum

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad \text{und} \quad dx = \frac{dy}{p}$$

setzt:

$$-\frac{p\frac{dp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}.$$

Um sie zu integrieren, braucht man sie nur mit ydy zu multiplizieren; denn es wird:

$$\frac{-ypdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dy}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{ydy}{a},$$

und die linke Seite ist das exakte Differential von

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}};$$

folglich erhält man:

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y^2 \pm b^2}{2a};$$

$\pm \frac{b^2}{2a}$ ist die willkürliche Konstante. Hieraus folgt:

$$p = \frac{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}{y^2 \pm b^2}$$

oder

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

Das Problem ist also auf eine Quadratur zurückgeführt.

Ist die Konstante b null, so wird die Differentialgleichung:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{4a^2 - y^2}},$$

wenn man von der Lösung $y = 0$ absieht. Die Integration giebt:

$$x - x_0 = -\sqrt{4a^2 - y^2} \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 + y^2 = 4a^2,$$

also einen Kreis. Dafs die Kugel eine der gesuchten Flächen sein mufs, ist von vornherein evident.

Setzt man $b^2 = ca$, wobei c eine neue Konstante ist, und läfst man alsdann a unendlich werden, so reduziert sich die allgemeine Differentialgleichung auf die folgende:

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{4y^2 - c^2}};$$

hieraus folgt:

$$\frac{2(x - x_0)}{c} = l\,\frac{y + \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{4}}}{\frac{1}{2}c}$$

und

$$y = \frac{c}{4}\left[e^{\frac{2(x-x_0)}{c}} + e^{-\frac{2(x-x_0)}{c}}\right].$$

Diese Gleichung stellt eine Kettenlinie dar, welche, wie wir wissen, der Ort der Brennpunkte einer Parabel ist, die ohne zu gleiten auf einer festen Geraden rollt (Nr. 225). Die Rotationsfläche, welche die Kurve erzeugt, indem sie um die Abscissenachse rotiert, hat die Eigenschaft, dafs ihre mittlere Krümmung in jedem Punkte null ist, d. h. dafs überall die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

Von dieser Thatsache ausgehend und dabei bemerkend, dafs in dem allgemeinen Fall, wo die Konstanten a und b unbestimmt bleiben, das Integral des Differentiales dx keine anderen Transscendenten enthält, als solche, die den Bogen einer Ellipse oder Hyperbel ausdrücken, hat Delaunay zuerst den Gedanken gehabt, dafs sich der Meridian einer Rotations-

fläche mit konstanter mittlerer Krümmung durch den Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel erzeugen lassen mufs, wenn diese Kurven, ohne zu gleiten, auf einer festen Geraden rollen. Diesen eleganten Satz hat er in einer Abhandlung im 6. Bande des *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Ser. 1 bewiesen, und man kann seine Giltigkeit in folgender Weise bestätigen.

Es sei

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptachsen; wir bezeichnen mit

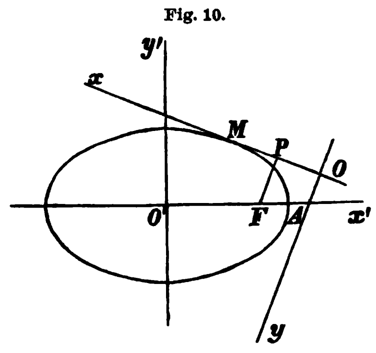


Fig. 10.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

die Entfernung eines Brennpunktes F vom Mittelpunkt, mit s' den Bogen AM der Ellipse, zwischen dem Scheitel A und dem Punkte $M(x', y')$. Im Punkte M konstruieren wir die Tangente Ox, tragen von M aus die Länge $MO = s'$ ab und ziehen durch O die Gerade Oy senkrecht zu Ox; endlich bezeichnen wir mit y das Lot FP vom Brennpunkt F auf die Tangente Ox und mit x die Entfernung PO des Fufspunktes dieses Lotes vom Punkte O. Man hat dann, nach bekannten Formeln:

$$y = b\sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}}, \quad x = s' - \frac{cyy'}{b^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen und die der Ellipse bestimmen x' und y' als Funktion von y. Man findet:

$$x' = \frac{a^2}{c}\,\frac{b^2 - y^2}{b^2 + y^2},$$

$$y' = \frac{b^2\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}}{c(b^2 + y^2)}.$$

Hieraus folgert man leicht:

$$ds' = \frac{8a^2b^2y^2dy}{(b^2+y^2)^2\sqrt{4a^2y^2-(b^2+y^2)^2}},$$

$$\frac{c}{b^2}d(yy') = \frac{8a^2b^2y^2-(b^2+y^2)^3}{(b^2+y^2)^2\sqrt{4a^2y^2-(b^2+y^2)^2}}dy.$$

Die Differenz der linken Seiten dieser Gleichungen ist nichts anderes als dx, also ist:

$$dx = \frac{(b^2+y^2)}{\sqrt{4a^2y^2-(b^2+y^2)^2}}dy.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Kurve, welche vom Brennpunkte F beschrieben wird, wenn die Ellipse, ohne zu gleiten, auf der Geraden Ox rollt; will man an Stelle der Ellipse eine Hyperbel einführen, so muſs man $-b^2$ statt b^2 setzen. Diese Differentialgleichung ist aber mit der des aufgestellten Problemes identisch.

756. Fünfte Aufgabe. *Die Rotationsflächen zu bestimmen, bei welchen die Krümmung in allen Punkten konstant ist.*

Das Krümmungsmaſs einer Fläche wird, wie in Nr. 318 gezeigt wurde, durch den reziproken Wert des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien ausgedrückt, also wird wie vorhin für die Rotationsflächen:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{N} = k$$

oder

$$\frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2} = k.$$

Dabei bedeutet k eine positive oder negative gegebene Zahl, im ersten Falle sind die Hauptkrümmungsradien gleich gerichtet, und die Fläche besitzt eine positive konstante Krümmung, im anderen Falle sind sie entgegen gerichtet, und die Krümmung der Fläche ist negativ. Führt man wiederum die Substitution

$$\frac{dy}{dx} = p$$

ein, so folgt:

$$\frac{-p\frac{dp}{dy}}{y(1+p^2)^2} = k \quad \text{oder} \quad \frac{-p\,dp}{(1+p^2)^2} = ky\,dy.$$

Also ist:

$$\frac{1}{1+p^2} = k(y^2 + C) \quad \text{oder} \quad p^2 = \frac{1-k(y^2+C)}{k(y^2+C)},$$

wenn C eine willkürliche Konstante bedeutet. Die vollständige Lösung der Aufgabe hängt sonach von der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-k(y^2+C)}{k(y^2+C)}} \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy\sqrt{k(y^2+C)}}{\sqrt{1-k(y^2+C)}}$$

ab und wird durch die Quadratur

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy\sqrt{k(y^2+C)}}{\sqrt{1-k(y^2+C)}}$$

erhalten. Giebt man der Gröfse k einen positiven Wert und setzt man die Konstante C gleich 0, so ist:

$$dx = \frac{y\,dy\sqrt{k}}{\sqrt{1-ky^2}}, \quad \text{also} \quad x - x_0 = \frac{-1}{\sqrt{k}}\sqrt{1-ky^2},$$

mithin

$$(x-x_0)^2 + y^2 = \frac{1}{k}.$$

Diese Meridiankurve ist ein Kreis, die zugehörige Rotationsfläche eine Kugel, für welche das Quadrat des Radius gleich $\frac{1}{k}$ ist.

Ist k negativ, gleich $-m^2$, und wählt man C so, dafs

$$kC = -m^2C = 1$$

ist, so folgt:

$$dx = \frac{dy\sqrt{1-m^2y^2}}{my} = \frac{dy}{my\sqrt{1-m^2y^2}} - \frac{my\,dy}{\sqrt{1-m^2y^2}}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$x - x_0 = \frac{1}{m}\, l\, \frac{\sqrt{1-m^2y^2}-1}{my} + \frac{\sqrt{1-m^2y^2}}{m}.$$

Es stellt, wenn wir m positiv annehmen, eine Kurve dar, welche im Punkte

$$x = x_0, \quad y = -\frac{1}{m}$$

eine Spitze hat und daselbst eine Tangente parallel der Ordinatenachse besitzt; von diesem Punkte aus erstreckt sich die Kurve in zwei symmetrischen Ästen nach der Abscissenachse hin, der

sie ihre konvexe Seite zuwendet und zu welcher sie asymptotisch verläuft. Sie hat überdies die Eigenschaft, dafs die Länge der Tangente, d. h. die Strecke zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenachse, konstant gleich $\frac{1}{m}$ ist und heifst die *Traktrix.*

757. Sechste Aufgabe. *Das allgemeine Integral der Gleichung*

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{y^2}{x^3} = 0$$

zu bestimmen. Diese Gleichung ist homogen in Bezug auf y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; man hat also zu setzen:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

und erhält die Gleichung erster Ordnung:

$$z\frac{dz}{dx} + z^3 + \frac{2}{x^3} = 0.$$

Diese Gleichung wird homogen, wenn man

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}$$

einführt; denn diese Substitution ergiebt:

$$t^2 z\frac{dz}{dt} - (z^3 + 2t^3) = 0.$$

Für

$$z = ut, \quad dz = udt + tdu$$

erhält sie die Form:

$$\frac{dt}{t} - \frac{udu}{u^3 - u^2 + 2} = 0$$

oder

$$\frac{dt}{t} + \frac{1}{5}\frac{du}{u+1} - \frac{1}{5}\frac{(u-1)du}{(u-1)^2+1} - \frac{3}{5}\frac{du}{(u-1)^2+1} = 0.$$

Integriert man diese und ersetzt wieder t durch $\frac{1}{x}$, u durch zx, so folgt:

$$-lx + \frac{1}{5}l\frac{xz+1}{\sqrt{(xz-1)^2+1}} - \frac{3}{5}\operatorname{arc\,tang}(xz-1) = C.$$

Nachdem der Wert von z durch diese Gleichung definiert ist, wird das gesuchte Integral gleich:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx};$$

es enthält die beiden willkürlichen Konstanten x_0 und C.

758. Siebente Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, deren Bogenlängen proportional den entsprechenden Bogen der Evolute sind.*

Bezeichnen wir mit s den Bogen der gesuchten Kurve, der von einem willkürlich fixierten Punkte an gerechnet wird, mit s_1 den entsprechenden der Evolute, mit α eine gegebene Konstante, so ist die Gleichung des Problemes:

$$s_1 = \alpha s \quad \text{oder} \quad ds_1 = \alpha ds;$$

da nun ds_1 gleich dem Differentiale des Krümmungsradius der gesuchten Kurve ist, so wird

$$dR = \alpha ds.$$

Führt man rechtwinklige Koordinaten ein, so wird diese Gleichung von der dritten Ordnung; folglich treten bei der Integration drei willkürliche Konstanten auf.

Diese Integration läſst sich nun leicht in folgender Weise ausführen.

Es sei φ der Neigungswinkel der Tangente zur x-Achse; dann ist:

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

und unsere Differentialgleichung wird

$$\frac{dR}{R} = \alpha d\varphi;$$

die Integration ergiebt also:

$$lR - la = \alpha\varphi \quad \text{oder} \quad R = ae^{\alpha\varphi},$$

wobei a eine willkürliche Konstante ist. Man hat also auch

$$ds = ae^{\alpha\varphi} d\varphi,$$

und folglich:

$$dx = ae^{\alpha\varphi} \cos\varphi d\varphi, \quad dy = ae^{\alpha\varphi} \sin\varphi d\varphi.$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man die zweite mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert hat, so folgt:

$$d(x + iy) = a e^{(\alpha + i)\varphi} d\varphi.$$

Die Integration ergiebt, wenn man mit $x_0 + iy_0$ eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$(x - x_0) + i(y - y_0) = \frac{a}{\alpha + i} e^{(\alpha + i)\varphi}.$$

Diese Gleichung zerlegt sich in zwei andere, und wenn man aus diesen den Winkel φ eliminiert, so erhält man das gesuchte Integral, das die drei willkürlichen Konstanten x_0, y_0, α enthält. Wir setzen:

$$\frac{a}{\alpha + i} = m e^{\mu i},$$

ferner

$$x - x_0 = \varrho \cos(\omega + \mu), \quad y - y_0 = \varrho \sin(\omega + \mu).$$

Dann sind ϱ und ω Polarkoordinaten, und die obige Gleichung wird:

$$\varrho e^{i\omega} = m e^{\alpha\varphi} e^{i\varphi},$$

also:

$$\varrho = m e^{\alpha\varphi}, \quad \omega = \varphi,$$

und folglich

$$\varrho = m e^{\alpha\omega}.$$

Sonach ist die logarithmische Spirale die einzige Kurve, welche die in Rede stehende Eigenschaft besitzt. Die vorstehende Lösung liefert zugleich ein Beispiel, wie man geometrische Aufgaben der behandelten Art vereinfachen kann.

759. Achte Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius proportional ist dem von einem festen Punkte ausgehenden Radiusvektor.*

Indem wir die gesuchte Kurve als Enveloppe ihrer Tangenten betrachten, wenden wir nach Nr. 213 die beiden Gleichungen an:

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = f(\varphi),$$

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = f'(\varphi),$$

welche die rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen der Variabelen φ und $f(\varphi)$ ausdrücken lassen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt nämlich:

$$x = f(\varphi) \sin\varphi + f'(\varphi) \cos\varphi,$$
$$y = -f(\varphi) \cos\varphi + f'(\varphi) \sin\varphi,$$

also:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{[f(\varphi)]^2+[f'(\varphi)]^2};$$

ferner:

$$dx=[f(\varphi)+f''(\varphi)]\cos\varphi d\varphi,\quad dy=[f(\varphi)+f''(\varphi)]\sin\varphi d\varphi,$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=ds=[f(\varphi)+f''(\varphi)]d\varphi.$$

Da der Krümmungsradius gleich $\frac{ds}{d\varphi}$ und der Radiusvektor gleich

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

ist, so wird die Differentialgleichung des Problemes:

$$\frac{d^2f}{d\varphi^2}+f=m\sqrt{f^2+\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2},$$

wobei m eine gegebene Zahl ist. Da diese Gleichung die Variabele φ nicht enthält, so setzen wir:

$$\frac{df}{d\varphi}=f',\quad \frac{d^2f}{d\varphi^2}=f'\frac{df'}{df},$$

so dafs

$$f'\frac{df'}{df}+f=m\sqrt{f^2+f'^2}$$

wird. Die Integration läfst sich hier ohne weiteres ausführen, denn es ist

$$\frac{fdf+f'df'}{\sqrt{f^2+f'^2}}=mdf,$$

also:

$$\sqrt{f^2+f'^2}=m(f-C).$$

Da nun

$$f'=\frac{df}{d\varphi}$$

ist, so folgt weiter:

$$d\varphi=\frac{df}{\sqrt{m^2(f-C)^2-f^2}}.$$

Ist $m^2<1$, so ergiebt die Integration:

$$\varphi-\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arcsin\left(\frac{1-m^2}{mC}f+m\right).$$

Hieraus folgt, wenn man

$$\frac{mC}{1-m^2}=a,\quad \sqrt{1-m^2}=\mu$$

setzt:

$$f(\varphi)=-a\sqrt{1-\mu^2}+a\sin\mu(\varphi-\varphi_0);$$

a und φ_0 sind willkürliche Konstanten. Die gesuchten Kurven sind algebraisch, wenn μ eine rationale Zahl ist.

Ist $m^2 > 1$, so erhält man:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} l(t + \sqrt{t^2 - 1});$$

t bezeichnet die Gröfse

$$\frac{m^2-1}{mC} f - m,$$

und φ_0 ist eine Konstante. Setzt man

$$\frac{mC}{m^2-1} = a, \quad \sqrt{m^2 - 1} = \mu,$$

so wird:

$$f(\varphi) = a\sqrt{1 + \mu^2} + a\,\frac{e^{\mu(\varphi-\varphi_0)} + e^{-\mu(\varphi-\varphi_0)}}{2}.$$

Im Falle $m^2 = 1$ hat man

$$d\varphi = \frac{df}{\sqrt{-2Cf + C^2}}$$

und hieraus, wenn man

$$\frac{C}{2} = a$$

setzt:

$$f(\varphi) = a[1 - (\varphi - \varphi_0)^2].$$

§ 3. Sonstige Integrationsmethoden.

760. Der Multiplikator einer Differentialgleichung höherer Ordnung. Wir betrachten eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen den Variabelen x und y, und nehmen an, dafs dieselbe auf die Form gebracht ist:

$$P\frac{d^n y}{dx^n} + Q = 0, \tag{1}$$

wobei P und Q Funktionen von

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

sein mögen. Man kann nun schreiben:

$$Pd\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Qdx = 0, \tag{2}$$

und wenn die linke Seite dieser Gleichung das exakte Differential einer Funktion u von

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

ist, so ist evident, dafs die Gleichung

$$u = \text{const.}$$

ein erstes Integral der Differentialgleichung (1) ist.

Wie auch die Funktionen P und Q zusammengesetzt sein mögen, es existieren immer Faktoren λ, mittelst deren die linke Seite der Gleichung (2) das exakte Differential einer Funktion u von

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

wird.

Denn betrachten wir eines der ersten Integrale der Gleichung (2), und ist

$$u = C$$

dieses Integral, aufgelöst nach der Konstanten, die es enthält, so erhält man durch Differentiation desselben, indem man $y^{(i)}$ an Stelle von $\frac{d^i y}{dx^i}$ schreibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = 0,$$

und der Wert $y^{(n)}$, der aus dieser Gleichung folgt, mufs mit dem Werte, welchen die ursprüngliche Differentialgleichung, nämlich

$$Q + Py^{(n)} = 0$$

ergiebt, identisch sein; also ist

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} y' + \frac{\partial u}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}}{Q}.$$

Bezeichnet man also mit λ den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} = \lambda P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \lambda Q.$$

Hieraus folgt, dafs der Ausdruck

$$\lambda P dy^{(n-1)} + \lambda Q dx$$

ein exaktes Differential ist.

Man kann durch eine Überlegung, welche auf Nr. 735 ff. fufst, feststellen, dafs ein singuläres Integral der Differentialgleichung die Gleichung

$$\frac{1}{\lambda} = 0$$

befriedigen mufs. Wir beschränken uns indes auf diese Angabe.

Die Bestimmung der integrierenden Faktoren bietet indes im allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten; es giebt jedoch Fälle, in denen die Ermittelung sich leicht darbietet. Wir wollen hier eines der von Euler behandelten Beispiele geben.

761. Ein Beispiel von Euler. Die Gleichung, um die es sich handelt, ist die folgende:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha y}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} = 0.$$

Prüft man ihre Form, so erkennt man, dafs man eine Untersuchung anstellen kann, ob es nicht einen Faktor von der Form

$$\left(2X_1 \frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right) dx$$

giebt, der die linke Seite der Gleichung in das exakte Differential einer Funktion u von

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx}$$

verwandelt. Existiert solch ein Faktor, so hat der Teil

$$\frac{\partial u}{\partial y'} dy'$$

seines totalen Differentiales den Wert

$$\frac{\partial[X_1 y'^2 + 2X_2 y y']}{\partial y'} dy',$$

und folglich ist

$$u = X_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2X_2 y \frac{dy}{dx} + U,$$

wobei U nur noch eine Funktion von x und y ist. Setzt man das Differential von u gleich null, so folgt:

$$\left(2X_1 \frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dX_1}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dX_2}{dx} \frac{dy}{dx} y + 2X_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dU}{dx} = 0,$$

und damit diese Gleichung mit der gegebenen identisch ist, mufs

$$\frac{2X_1\alpha y\,dy+2X_2\alpha y^2dx}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2}-\left(\frac{dX_1}{dx}+2X_2\right)\frac{(dy)^2}{dx}-2\frac{dX_2}{dx}y\,dy=dU$$

sein. Der erste Teil dieses Wertes von dU wird ein exaktes Differential, wenn man

$$X_1=\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2,$$

$$X_2=-\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx}=-\delta-\varepsilon x$$

setzt, und dann folgt, dafs der nachbleibende Teil ebenfalls ein exaktes Differential ist. Man erhält:

$$dU=-\frac{\alpha}{\beta}d\frac{\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}{\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}+\varepsilon d(y^2),$$

und folglich:

$$U=-\frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}{\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}+\varepsilon y^2+C;$$

C ist eine Konstante. Der Faktor, welchen wir benutzt haben, ist

$$2(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)\frac{dy}{dx}-2(\delta+\varepsilon x)y,$$

und wir erhalten als erstes Integral der gegebenen Gleichung:

$$(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(\delta+\varepsilon x)y\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)}{\beta(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)}+\varepsilon y^2+C=0.$$

762. Integration durch Differentiation. Es sei

$$(1)\qquad U=0$$

eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen den Variabelen x und y; indem man dieselbe differentiiert, erhält man eine Gleichung $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(2)\qquad U_1=0,$$

und man kann nun verschiedene Kombinationen der Gleichungen (1) und (2) bilden. Es sei:

$$(3)\qquad V_1=0$$

eine Gleichung $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus solch einer Kombination hervorgeht. Kann man nun ein erstes Integral

der Gleichung (3) bilden, welches von der ursprünglichen Gleichung verschieden ist, so kennt man auch ein erstes Integral dieser letzteren; denn wenn

$$(4) \qquad V = 0$$

ein erstes Integral der Gleichung (3) ist, und man eliminiert $\frac{d^n y}{dx^n}$ zwischen den Gleichungen (1) und (4), so ist das Resultat eine Gleichung

$$(5) \qquad W = 0$$

von der Ordnung $n-1$ mit einer willkürlichen Konstante, welche die ursprüngliche Gleichung befriedigen muſs.

Ist die Gleichung (1) von der ersten Ordnung, so liefert die Gleichung (5) ihr vollständiges Integral.

763. Ein Beispiel. Um ein Beispiel für diese Integrationsmethode zu geben, betrachten wir die Bestimmung der Krümmungskurven auf einer centrischen Fläche zweiter Ordnung. Die Gleichung der Fläche sei:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1,$$

und wenn man

$$A = \frac{(c^2 - b^2)\varrho^2}{c^2(\varrho^2 - b^2)}, \quad B = \frac{b^2\varrho^2}{c^2}$$

setzt, so wird die Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungskurven auf die xy-Ebene (Nr. 339):

$$(1) \qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Durch Differentiation derselben erhält man:

$$(2) \quad \left(2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 - B\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0,$$

und die Elimination von $x^2 - Ay^2 - B$ zwischen den Gleichungen (1) und (2) ergiebt, mit Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$:

$$(3) \qquad xy\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung mit $xy\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0;$$

und man erhält durch Integration:

$$l\frac{dy}{dx} + ly - lx = lC$$

oder

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = C, \tag{4}$$

wobei C eine Konstante ist. Die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ zwischen den Gleichungen (1) und (4) liefert schließlich:

$$y^2 - Cx^2 + \frac{BC}{AC+1} = 0, \tag{5}$$

was mit dem früher erhaltenen Resultate (Nr. 339 und 739) übereinstimmt.

764. Ein Beispiel zur Integration eines simultanen Systemes. Wir sahen, daſs die Integration eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen beliebiger Ordnungen sich immer durch Elimination zurückführen läſst auf die Integration von einer oder von mehreren Gleichungen, von denen jede nur zwei Variabele enthält. Solch eine Reduktion ist aber durchaus nicht immer dazu geeignet, das Problem zu vereinfachen. Da jede allgemeine Integrationsmethode fehlt, so wird es nützlich sein, hier ein besonderes Beispiel zu betrachten, welches wir der Geometrie entnehmen.

Aufgabe. *Es sollen die orthogonalen Trajektorien einer beweglichen Ebene bestimmt werden.*

Es seien x, y, z drei rechtwinklige Koordinaten und

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - u = 0 \tag{1}$$

die Gleichung der beweglichen Ebene; die Entfernung u der Ebene vom Anfangspunkte und die Winkel α, β, γ, die ihre Normale mit den Achsen bildet, sind gegebene Funktionen eines Parameters t. Die gesuchten Trajektorien sollen senkrecht

zur Ebene sein, also werden die Differentialgleichungen des Problemes:

$$(2) \qquad \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma}.$$

Man kann annehmen, dafs man aus der Gleichung (1) den Wert von t als Funktion von x, y, z bestimmt hat, und die Kosinus der Winkel α, β, γ können demnach in den Gleichungen (2) als Funktionen von x, y, z angesehen werden. Um diese Gleichungen zu integrieren, benutzen wir die in Nr. 273 aufgestellten Formeln, sowie die Bezeichnungen daselbst. Es sind also α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der gesuchten Kurve mit den Koordinatenachsen bildet, ferner bezeichnen wir mit φ, ψ, χ und mit λ, μ, ν die Winkel, welche die Hauptnormale und die Achse der Oskulationsebene mit den Koordinatenachsen bilden, ferner sind $d\sigma$ und $d\tau$ Kontingenz- und Torsionswinkel, ds das Bogenelement; also:

$$(3) \qquad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \\ d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}. \end{cases}$$

Nun ist jedes Glied der Gleichung (2) gleich ds, und folglich:

$$(4) \qquad dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\cos\beta, \quad dz = ds\cos\gamma.$$

Wir setzen

$$(5) \qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = U,$$

und indem wir diese Gleichung zweimal differentiieren und die Gleichungen (4) beachten, erhalten wir (Nr. 273):

$$(6) \qquad x\cos\varphi + y\cos\psi + z\cos\chi = \frac{dU}{d\tau},$$

$$(7) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = -\frac{d\tau}{d\sigma}\left[U + \frac{d\frac{dU}{d\tau}}{d\tau}\right].$$

Vergleicht man die Gleichungen (1) und (7), so folgt:

$$(8) \qquad \frac{d\frac{dU}{d\tau}}{d\tau} + U = -u\frac{d\sigma}{d\tau}.$$

Nach der ersten Gleichung (3) ist $d\sigma$ das Produkt von dt mit einer gegebenen Funktion von t, weil $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ selbst gegebene Funktionen von t sind. Ferner sind nach den Formeln in Nr. 274 $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ und $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ gleichfalls bekannte Funktionen von t; endlich ist nach der zweiten Gleichung (3) auch $d\tau$ das Produkt solch einer Funktion mit dt. Hieraus folgt, dafs die Gleichung (8) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den Variabelen U und t ist; ihre Integration liefert also zwei willkürliche Konstanten. Ist der Wert von U bekannt, so sind die Koordinaten x, y, z durch die Gleichungen (5), (6) und (7) als Funktionen des Parameters t gegeben; diese Gleichungen können durch

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0 \tag{9}$$

dargestellt werden, wenn man

$$V = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - U \tag{10}$$

setzt. Die Gleichung (8) gehört zu den linearen Differentialgleichungen, die im folgenden Kapitel behandelt werden. Ihre Integration läfst sich indessen leicht auch folgendermafsen ausführen. Es seien X und Y zwei neue Variabele, definiert durch die Gleichungen:

$$X\sin\tau - Y\cos\tau = U, \quad X\cos\tau + Y\sin\tau = \frac{dU}{d\tau},$$

so ist:

$$X = U\sin\tau + \frac{dU}{d\tau}\cos\tau, \quad Y = -U\cos\tau + \frac{dU}{d\tau}\sin\tau;$$

ferner:

$$dX = \left[U + \frac{d\frac{dU}{d\tau}}{d\tau}\right]\cos\tau\, d\tau, \quad dY = \left[U + \frac{d\frac{dU}{d\tau}}{d\tau}\right]\sin\tau\, d\tau,$$

und also vermöge der Gleichung (8):

$$dX = -u\frac{d\sigma}{d\tau}\cos\tau\, d\tau, \quad dY = -u\frac{d\sigma}{d\tau}\sin\tau\, d\tau.$$

Integriert man diese Gleichungen und bezeichnet man mit A und B zwei willkürliche Konstanten, so folgt:

$$X = A - \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos\tau\, d\tau, \quad Y = B - \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin\tau\, d\tau,$$

und sonach ist:

$$(11) \quad U = A \sin\tau - B\cos\tau - \sin\tau \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos\tau\, d\tau + \cos\tau \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin\tau\, d\tau.$$

Diese Gleichung stellt U als Funktion von τ dar, oder wenn man will, als Funktion des Parameters t. Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

Fünftes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen. Grundlagen.

§ 1. Zusammenhang der vollständigen Lösung mit den partikularen.

765. Definitionen. Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung heifst *linear*, wenn in ihr die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert vorkommen.

Wird die unabhängige Variabele mit x, die unbekannte Funktion mit y bezeichnet, so ist die allgemeine Form einer linearen Gleichung mit zwei Variabelen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = V;$$

die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots P_n, V$ sind gegebene Funktionen von x, die sich auch auf Konstanten reduzieren können.

Ist die Gröfse V null, so sagen wir, dafs die lineare Gleichung *kein zweites Glied* hat, oder dafs sie *homogen* ist. Später wird gezeigt werden, dafs die Integration einer linearen Gleichung mit zweitem Gliede immer auf die Integration einer homogenen linearen Gleichung zurückkommt, welche man erhält, indem man an Stelle der Funktion V den Wert null substituiert.

Es ist nach den allgemeinen Sätzen über singuläre Lösungen (Nr. 664, 728 ff.) evident, dafs die linearen Gleichungen keine singulären Lösungen haben, wenn die Funktionen P und V eindeutige Funktionen von x sind. Es giebt vielmehr nur singuläre *Punkte* an den Stellen, an welchen eine oder mehrere dieser Funktionen singulär werden.

766. Reduktion der Ordnung.

Satz I. *Die Ordnung einer linearen Gleichung ohne zweites Glied kann immer um eine Einheit erniedrigt werden.*

Die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

gehört zu der Klasse der homogenen (Nr. 750); ihre Ordnung wird folglich erniedrigt, wenn man

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \ldots$$

setzt; die neue Gleichung ist aber nicht mehr linear.

Im Falle $n = 2$ hat man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 = 0,$$

und die Transformation ergiebt die *allgemeine Riccatische Gleichung* (Nr. 697):

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + P_1 z + P_2 = 0.$$

767. Ableitung neuer Lösungen aus bekannten.

Satz II. *Kennt man eine Funktion $y = y_1$, welche die lineare Gleichung*

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

befriedigt, so wird die Gleichung auch durch $y = Cy_1$ erfüllt, wobei C eine willkürliche Konstante ist.

Denn das Resultat der Substitution von Cy_1 an Stelle von y in die linke Seite der obigen Gleichung ist gleich dem Produkte der Konstante C mit dem Resultate der Substitution von y_1.

Satz III. *Wird der linearen Gleichung durch die Funktionen*

$$y = y_1, \quad y = y_2, \dots y = y_p$$

genügt, so genügt ihr auch die Funktion

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_p.$$

Denn die Substitution von $y_1 + y_2 + \cdots + y_p$ in die linke Seite der Gleichung ergiebt einen Ausdruck, der gleich ist der Summe aus den Werten, welche bei der Substitution von $y_1, y_2, \dots y_p$ erhalten werden.

Aus den beiden letzten Eigenschaften folgt: Kennt man p Lösungen $y_1, y_2, \dots y_p$ einer linearen Gleichung ohne zweites Glied, so kann man auch eine Lösung derselben Gleichung mit p willkürlichen Konstanten bilden, nämlich:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_p y_p;$$

und wenn die Zahl p gleich ist der Ordnung n der Gleichung, so kann man auf diese Weise das vollständige Integral der Differentialgleichung bilden, vorausgesetzt, daſs $y_1, y_2, \dots y_n$ nicht durch eine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten verbunden sind. Wir führen, um dies einzusehen, den Begriff des *Fundamentalsystemes* ein.

768. Das Fundamentalsystem.

Definition. *Wenn ein System von n Funktionen von x so beschaffen ist, daſs zwischen ihnen keine lineare, homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten identisch besteht, so heiſst das System der n Funktionen ein Fundamentalsystem.*

Es gilt nun:

Satz IV. *Sind $y_1, y_2, \dots y_n$, n Funktionen, die ein Fundamentalsystem bilden, so ist die Determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch null. Die Accente bedeuten dabei Ableitungen.

Wir fügen hieran die Definition:

Die Determinante Δ *heifst die Hauptdeterminante der* n *Funktionen* $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Man kann nämlich immer n Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ so wählen, dafs

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
&u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n = 0, \\
&u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + \cdots + u_n y'_n = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)} = 0
\end{aligned}
$$

wird; denn man braucht für die Funktionen u nur die Unterdeterminanten einzusetzen, welche zu einer Horizontalreihe von Δ, z. B. der letzten, gehören.

Man kann auch immer annehmen, dafs diese Unterdeterminanten, also auch die u, nicht sämtlich identisch verschwinden. Denn wäre dies der Fall, so würde auch die Hauptdeterminante von $y_1 \ldots y_{n-1}$ identisch verschwinden, und der folgende Beweis würde dann lehren, dafs schon $y_1 \ldots y_{n-1}$ kein Fundamentalsystem bilden.

Wir wollen nun zeigen, dafs die Funktionen u stets derselben Funktion von x, multipliziert mit verschiedenen Konstanten, gleich sind. Differentiiert man nämlich die Gleichungen (2) successive, so erhält man jedesmal mit Berücksichtigung der folgenden:

$$
\begin{aligned}
&u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \cdots + u'_n y_n = 0, \\
&u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \cdots + u'_n y'_n = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&u'_1 y_1^{(n-2)} + u'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\
&u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} + (u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) = 0.
\end{aligned}
$$

Würde nun die Determinante Δ identisch verschwinden, so wäre auch identisch:

$$
\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \cdots y_n \\
y'_1 & y'_2 & \cdots y'_n \\
\cdot & \cdot & \cdots \cdot \\
y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots y_n^{(n-2)} \\
y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots y_n^{(n)}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Also ist auch

$$u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)} = 0.$$

Mithin bestehen die Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} u'_1 y_1 & + u'_2 y_2 & + \cdots + u'_n y_n & = 0, \\ u'_1 y'_1 & + u'_2 y'_2 & + \cdots + u'_n y'_n & = 0, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \\ u'_1 y_1^{(n-1)} & + u'_2 y_2^{(n-1)} & + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} & = 0, \end{array}$$

und aus diesem Gleichungssysteme, zusammen mit dem Systeme für die Funktion u folgt, daſs

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = \cdots = \frac{u'_n}{u_n}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert dieser Quotienten mit ϱ, so ist:

$$u_1 = C_1 e^{\int \varrho\, dx}, \quad u_2 = C_2 e^{\int \varrho\, dx}, \ldots u_n = C_n e^{\int \varrho\, dx}.$$

Es besteht also zwischen den y eine Identität der Form:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0,$$

wo die Konstanten C nicht alle identisch verschwinden, und das widerspricht der Voraussetzung. Also kann Δ nicht identisch verschwinden, und Satz IV ist bewiesen. Umgekehrt gilt:

Satz V. *Sind $y_1, y_2, \ldots y_n$, n Funktionen, deren Hauptdeterminante nicht identisch verschwindet, so bilden diese Funktionen ein Fundamentalsystem.*

In der That, bestünde eine Identität:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots C_n y_n = 0,$$

so würde durch $(n-1)$-malige Differentiation dieser Gleichung ein System der Form (2) entstehen, in welchem nur die C statt der u stünden. Daraus würde aber folgen, daſs Δ identisch verschwindet.

Wie wir gesehen haben, hat Δ die Eigenschaft, daſs:

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ist. Nimmt man nun an, dafs $y_1, y_2 \dots y_n$, n Lösungen von (1) sind, die ein Fundamentalsystem bilden, so ist:

$$y_i^{(n)} = -P_1 y_i^{(n-1)} - P_2 y_i^{(n-2)} - \cdots - P_n y_i$$

für $i = 1, 2, \dots n$. Es folgt also:

$$\frac{d\Delta}{dx} = -P_1 \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -P_1 \Delta$$

oder:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx} = -P_1.$$

Demnach wird:

$$l\Delta = -\int P_1 dx + lC \quad \text{oder} \quad \Delta = Ce^{-\int P_1 dx}.$$

Hieraus erkennt man:

Satz VI. *Hat man n Lösungen der linearen Differentialgleichung (1) ausfindig gemacht, deren Hauptdeterminante für irgend ein bestimmtes x, für das P_1 nicht singulär ist, nicht verschwindet, so bilden die n Lösungen ein Fundamentalsystem.*

Zum Schlusse dieser Nummer beweisen wir:

Satz VII. *Sind $y_1, y_2, \dots y_n$, n Lösungen von (1), die ein Fundamentalsystem bilden, so ist jede andere Lösung y von der Form:*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

wobei $C_1, C_2, \dots C_n$ willkürliche Konstanten sind.

Diese Eigenschaft ist evident für den Fall $n = 1$; denn hier ist die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y = 0.$$

Daraus folgt

$$y = C_1 y_1,$$

wenn man

$$y_1 = e^{-\int_{x_0}^{x} P_1 dx}$$

setzt.

Demnach genügt es, zu beweisen, dafs unser Satz auch bei Gleichungen von der Ordnung n gültig bleibt, falls er für Gleichungen von der Ordnung $n-1$ gilt. Nehmen wir also an, dafs der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

durch eine Funktion $y = y_1$ genügt wird, und machen wir die Substitution

$$y = y_1 z,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dz}{dx} + z \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \cdots$$

so entsteht, wenn man diese Werte in die Differentialgleichung (1) substituiert, eine Differentialgleichung für z, die wir mit (1a) uns bezeichnet denken. Ist nun y irgend eine Lösung von (1), so ist $z = y : y_1$ eine solche von (1a), und umgekehrt, ist z irgend eine Lösung von (1a), so ist $y = y_1 z$ eine solche von (1). Der Koeffizient von z wird nun in (1a) gleich:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + P_n y_1,$$

also der Annahme nach gleich null. Setzt man also

$$\frac{dz}{dx} = u,$$

so erhält man eine lineare Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung ohne zweites Glied zur Bestimmung von u; alle ihre Lösungen werden der Voraussetzung nach durch die Formel:

$$u = C_2 u_1 + C_3 u_2 + \cdots + C_n u_{n-1}$$

dargestellt, wenn $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ ein Fundamentalsystem bilden, folglich ist jede Lösung z von der Form:

$$z = C_1 + C_2 \int_{x_0}^{x} u_1 dx + C_3 \int_{x_0}^{x} u_2 dx + \cdots + C_n \int_{x_0}^{x} u_{n-1} dx.$$

Für y erhält man daher den Ausdruck:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1 dx + C_3 y_1 \int_{x_0}^{x} u_2 dx + \cdots + C_n y_1 \int_{x_0}^{x} u_{n-1} dx.$$

Die Faktoren, mit denen $C_2, \ldots C_n$ multipliziert erscheinen, sind Lösungen von (1). Bezeichnet man sie mit $y_2, \ldots y_n$, so wird daher:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

und unser Satz ist bewiesen.

769. Integration der nicht homogenen Gleichung nach Lagrange. Wir setzen, um die Formeln abzukürzen:

$$(1) \qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y,$$

und betrachten die Gleichung n^{ter} Ordnung:

$$(2) \qquad \Phi(y) = V,$$

deren rechte Seite eine gegebene Funktion von x ist. Kennt man das vollständige Integral der Gleichung

$$(3) \qquad \Phi(y) = 0,$$

so kann man stets durch bloſse Quadraturen das der Gleichung (2) ableiten.

Es sei

$$(4) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

die vollständige Lösung von (3), $C_1, C_2, \ldots C_n$ seien willkürliche Konstante und $y_1, y_2, \ldots y_n$, n Lösungen von (3), die ein Fundamentalsystem bilden. Ersetzt man jetzt die Gröſsen C durch willkürliche Funktionen von x, so kann die rechte Seite der Gleichung (4) noch jedwede Funktion darstellen, und folglich ist sie auch geeignet, das allgemeine Integral der Gleichung (2) auszudrücken. Man kann dabei noch für $n-1$ der Gröſsen C willkürliche Funktionswerte wählen, oder zwischen ihnen $n-1$ Relationen festsetzen, denn solange eine der Gröſsen willkürlich bleibt, thun wir nichts anderes, als daſs wir an Stelle von y eine neue, unbekannte Funktion einführen.

Differentiiert man nun die Gleichung (4) unter der Annahme, dafs die willkürlichen Gröfsen variabel sind, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx},$$
$$+ y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx},$$

und da wir noch $n-1$ Relationen einführen können, so setzen wir zuerst:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0;$$

folglich wird der Wert von $\frac{dy}{dx}$ einfach gleich:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx},$$

so dafs er die nämliche Form hat, wie bei der Annahme willkürlicher Konstanten. Wir bilden nun in ähnlicher Weise die folgenden Ableitungen von y, bis zu der Ableitung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, indem wir dabei zwischen den willkürlichen Funktionen C immer die Relationen festsetzen, welche notwendig sind, damit die Formeln für diese Ableitungen die nämlichen sind, wie bei der Annahme willkürlicher Konstanten. Diese Relationen sind dann:

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx} = 0, \end{cases}$$

und gleichzeitig erhält man:

$$(6) \quad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \\ \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}. \end{cases}$$

Nun müssen wir noch den Wert von $\frac{d^n y}{dx^n}$ bilden; dabei können wir nun nicht mehr eine neue Relation zwischen den willkürlichen Funktionen einführen, und so liefert die letzte der Gleichungen (6) durch Differentiation:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \cdots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} \\ \quad + \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx}. \end{cases}$$

Wir substituieren nun in die Gleichung (2) die Werte von y und seinen n ersten Ableitungen, die aus den Gleichungen (6) und (7) folgen; es wird:

$$C_1 \Phi(y_1) + C_2 \Phi(y_2) + \cdots + C_n \Phi(y_n)$$
$$+ \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = V.$$

Die Gröfsen $\Phi(y_1)$, $\Phi(y_2), \ldots \Phi(y_n)$ sind nun aber der Annahme nach null; also wird:

$$(8)\quad \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = V.$$

Da nun die Determinante Δ der Funktionen $y_1, \ldots y_n$ nicht identisch verschwindet, weil diese ein Fundamentalsystem bilden, so lassen die Gleichungen (5) und (8) die Werte von

$$\frac{dC_1}{dx}, \quad \frac{dC_2}{dx}, \ldots \frac{dC_n}{dx}$$

als Funktionen von x berechnen.

Um diese Werte zu bilden, addieren wir die Gleichungen (5) und (8), nachdem wir die ersteren zuvor mit den Faktoren $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-2}$ multipliziert haben, und setzen allgemein:

$$(9)\quad \varphi(y) = \lambda_0 y + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}.$$

Man erhält:

$$(10)\quad \varphi(y_1) \frac{dC_1}{dx} + \varphi(y_2) \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \varphi(y_n) \frac{dC_n}{dx} = V.$$

Um den Wert von $\frac{dC_k}{dx}$ zu erhalten, mufs man die Faktoren λ so bestimmen, dafs

$$\varphi(y_1) = 0, \quad \varphi(y_2) = 0, \ldots \varphi(y_{k-1}) = 0, \quad \varphi(y_{k+1}) = 0, \ldots \varphi(y_n) = 0 \tag{11}$$

ist, alsdann ist:

$$\frac{dC_k}{dx} = \frac{V}{\varphi_k(y_k)}, \tag{12}$$

wobei $\varphi_k(y_k)$ den Wert bezeichnet, welchen $\varphi(y_k)$ annimmt, wenn die Koeffizienten λ den Gleichungen (11) genügen. Ist also c_k eine willkürliche Konstante, so wird:

$$C_k = c_k + \int_{x_0}^{x} \frac{V dx}{\varphi_k(y_k)}.$$

Setzt man demnach:

$$X = y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{V dx}{\varphi_1(y_1)} + y_2 \int_{x_0}^{x} \frac{V dx}{\varphi_2(y_2)} + \cdots + y_n \int_{x_0}^{x} \frac{V dx}{\varphi_n(y_n)},$$

so ist die vollständige Lösung der Gleichung (2):

$$y = X + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n;$$

sie setzt sich also aus der vollständigen Lösung der Gleichung (3) und einer partikularen Lösung X von (2) zusammen.

770. Integration der nicht homogenen Gleichung nach Cauchy. Die Methode, welche wir hier nach Lagrange entwickelt haben, beruht auf der *Variation der willkürlichen Konstanten* und besitzt eine weittragende Bedeutung in der Analysis; sie hat uns eine sehr elegante Lösung der gestellten Aufgabe geliefert. Ein anderes Verfahren, welches Cauchy angegeben hat, ist aber gleichfalls bemerkenswert.

Es handelt sich um die Integration der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = F(x), \tag{1}$$

deren rechte Seite wir mit $F(x)$ bezeichnen, und wir nehmen an, daſs das vollständige Integral $y = Y$ der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0 \tag{2}$$

bekannt ist. Die n willkürlichen Konstanten, welche in Y enthalten sind, können so bestimmt werden, daſs für $x = \alpha$ die Gleichungen bestehen:

$$Y = 0, \quad \frac{dY}{dx} = 0, \ldots \frac{d^{n-2} Y}{dx^{n-2}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} = F(\alpha). \tag{3}$$

Alsdann wird die Gleichung (1) befriedigt, indem man:

$$y = \int_0^x Y d\alpha \tag{4}$$

setzt.

In der That, man differentiiere die Gleichung (4) und bezeichne mit (Y) den Wert von Y für $\alpha = x$, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx} d\alpha + (Y),$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx} d\alpha. \tag{5}$$

Denn die Gleichungen (3) bestehen identisch in α, wenn man x durch α ersetzt; also auch identisch in x, wenn man α durch x ersetzt, und folglich ist (Y) identisch null.

Ebenso werden die Ableitungen

$$\frac{d^2 Y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-2} Y}{dx^{n-2}}$$

für $\alpha = x$ null, und sonach erhält man durch aufeinanderfolgende Differentiationen:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^2Y}{dx^2}\,d\alpha, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^3Y}{dx^3}\,d\alpha, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\,d\alpha; \end{cases}$$

schliefslich ergiebt eine neue Differentiation:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^nY}{dx^n}\,d\alpha + \left(\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\right);$$

$\left(\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\right)$ bedeutet den Wert von $\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}$ für $x = \alpha$. Dieser Wert ist aber gleich $F(x)$, weil der Annahme nach $\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}$ sich für $x = \alpha$ auf $F(\alpha)$ reduziert; also erhält man:

$$(7)\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^nY}{dx^n}\,d\alpha + F(x).$$

Werden die Werte von

$$y,\ \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

aus den Gleichungen (4), (5), (6) und (7) in die Gleichung (1) substituiert, so bekommt man:

$$\int_0^x \left(\frac{d^nY}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} + \cdots P_{n-1}\frac{dY}{dx} + P_nY\right)d\alpha = 0,$$

und dies ist in der That eine Identität, weil der Koeffizient von $d\alpha$ unter dem Integrale der Annahme nach verschwindet. Sonach kennt man eine Lösung der Gleichung (1); bezeichnet man dieselbe mit X und setzt dann $y = X + z$, so hat z der

Differentialgleichung (2) zu genügen, wie man aus der Substitution von y und seinen Ableitungen leicht findet. Daraus folgt, daſs man das vollständige Integral der Gleichung (1) durch Addition von X und dem vollständigen Integrale der Gleichung (2) erhält.

771. Reduktion der Ordnung durch partikulare Lösungen. Erste Methode. Wir setzen, wie in Nr. 769:

$$(1) \qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y;$$

$P_1, \ldots P_n$, V sind gegebene Funktionen von x. Das vollständige Integral der Gleichung

$$(2) \qquad \Phi(y) = V$$

wird, wie wir sahen, durch Quadraturen erhalten, sobald man die vollständige Lösung der Gleichung

$$(3) \qquad \Phi(y) = 0$$

kennt, oder, was auf das nämliche hinauskommt, sobald man n partikulare Lösungen dieser Gleichung kennt, welche voneinander linear unabhängig sind, also ein Fundamentalsystem bilden. Dieses Resultat wollen wir nun verallgemeinern, indem wir beweisen, daſs die Integration der Gleichung (2) nur noch die Integration einer linearen Gleichung von der Ordnung $n - p$ erfordert, sobald man p partikulare Lösungen der Gleichung (3) kennt.

Ist *eine* partikulare Lösung y_1 der Gleichung (3) bekannt, so hat man eine allgemeinere, indem man

$$(4) \qquad y = C_1 y_1$$

setzt, wobei C_1 willkürlich ist; betrachtet man nun C_1 als eine Variabele, so kann die Gleichung (4) die allgemeine Lösung der Gleichung (2) darstellen; hierzu dient die nämliche Transformation der Variabelen, wie in Nr. 768. Die Gleichung (4) giebt durch Differentiation (Nr. 73):

$$
(5) \begin{cases}
\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dC_1}{dx}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{d^2C_1}{dx^2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^ny}{dx^n} = C_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + \frac{n}{1} \frac{dC_1}{dx} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{d^2C_1}{dx^2} \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \cdots + y_1 \frac{d^nC_1}{dx^n},
\end{cases}
$$

und da $\Phi(y_1)$ der Annahme nach null ist, so erhält man durch die Substitution der Werte (4) und (5) in die Gleichung (2) eine Gleichung von der Form:

$$
(6) \qquad \frac{d^nC_1}{dx^n} + Q_1 \frac{d^{n-1}C_1}{dx^{n-1}} + \cdots + Q_{n-1} \frac{dC_1}{dx} = V,
$$

wobei $Q_1, \ldots Q_{n-1}$ bekannte Funktionen von x sind. Die Gleichung (6), aus welcher man den Wert von C_1 zu bestimmen hat, ist linear und von der n^{ten} Ordnung. Da sie aber nur die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält und nicht die Funktion selber, so kann man ihre Ordnung um eine Einheit erniedrigen, indem man

$$
(7) \qquad \frac{dC_1}{dx} = u
$$

setzt; sie wird also:

$$
(8) \qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + Q_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + Q_{n-1}u = V.
$$

Kann man die allgemeine Lösung dieser Gleichung bestimmen, so erhält man aus der Gleichung (7), wenn c_1 eine willkürliche Konstante bedeutet:

$$
C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} u\,dx,
$$

und schliefslich giebt die Gleichung (4):

$$
(9) \qquad y = c_1 y_1 + y_1 \int_{x_0}^{x} u\,dx,
$$

was das vollständige Integral der gegebenen Gleichung ist.

Demnach läfst die Kenntnis eines partikularen Integrales der Gleichung (3) die Ordnung der ursprünglichen Gleichung (2) um eine Einheit erniedrigen, ohne dafs die lineare Form dabei zerstört wird.

Wir nehmen nun weiter an, dafs p partikulare Integrale der Gleichung (3)

$$y_1, y_2, \dots y_p,$$

zwischen denen keine lineare Relation besteht, bekannt sind. Vermittelst des Integrales y_1 führt man, wie wir gesehen haben, die Integration der Gleichung (2) auf die der Gleichung (8) zurück, die wir kurz mit

$$\Psi(u) = V \tag{10}$$

bezeichnen wollen. Von der Gleichung

$$\Psi(u) = 0 \tag{11}$$

kennt man nun aber $p-1$ partikulare Integrale, denn es ist ersichtlich, dafs man von der Gleichung (11) zur Gleichung (3) durch die Substitution

$$u = \frac{d\frac{y}{y_1}}{dx}$$

gelangt, und weil $y_2, y_3, \dots y_p$ Lösungen dieser letzteren Gleichung sind, so wird die Gleichung (11) durch die Werte:

$$\frac{d\frac{y_2}{y_1}}{dx}, \frac{d\frac{y_3}{y_1}}{dx}, \dots \frac{d\frac{y_p}{y_1}}{dx}$$

erfüllt, die voneinander auch noch linear unabhängig sind, wenn solches bei den Funktionen $y_1, \dots y_n$ der Fall ist.

Man kann nun auf die Gleichung (10) alles übertragen, was wir von der Gleichung (2) ausgesagt haben; ihre Integration wird auf die einer linearen Gleichung $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung gebracht, und von der entsprechenden Gleichung ohne zweites Glied sind $p-2$ linear unabhängige partikulare Integrale bekannt. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man schliefslich eine lineare Gleichung von der Ordnung $n-p$, von deren Integration die Lösung der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung allein noch abhängt.

772. Bemerkungen. Die Kenntnis eines partikularen Integrales y_1 der Gleichung (2) führt, wie wir gesehen haben, die Integration dieser Gleichung auf die der Gleichung (3) zurück; mit anderen Worten, sie liefert ein Mittel, das zweite Glied verschwinden zu lassen, nicht aber die Ordnung der Gleichung zu erniedrigen. Hieraus folgt, daſs man, wenn p partikulare Integrale derselben Gleichung (2) bekannt sind, das zweite Glied verschwinden lassen und die Ordnung der Gleichung um $p-1$ Einheiten erniedrigen kann; denn ist das Integral y_1 dazu verwandt, um das zweite Glied aufzuheben, so kennt man $p-1$ Integrale, nämlich

$$y_2 - y_1, \quad y_3 - y_1, \cdots y_p - y_1$$

der transformierten Gleichung.

Ist das Verhältnis von V zu P_n konstant, so hat man eine Lösung der Gleichung (2), indem man

$$y = \frac{V}{P_n}$$

setzt; diese Gleichung ist also unmittelbar auf die Gleichung (3) zurückführbar.

Endlich sieht man durch die vorstehenden Entwickelungen direkt ein, daſs die linearen Gleichungen keine singulären Integrale besitzen, falls ihre Koeffizienten in der ganzen Ebene eindeutige Funktionen sind, die nur an einzelnen Stellen singuläre Punkte haben. Denn wir haben gezeigt, daſs, wenn y_1 eine Lösung der Gleichung

$$\Phi(y) = 0$$

ist, jedes Integral in der Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

dargestellt wird, $y = y_1$ ist also ein partikulares Integral. Desgleichen wird, wenn y_0 eine Lösung von

$$\Phi(y) = V$$

bedeutet, das allgemeine Integral dieser Gleichung von der Form:

$$y = y_0 + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n,$$

so daſs also auch y_0 ein partikulares Integral ist.

773. Reduktion der Ordnung. Zweite Methode. Die im vorigen Abschnitt ausgeführte Reduktion läßt sich noch in einer anderen, konziseren Weise ausführen, die uns ein neues Beispiel von der Variation der willkürlichen Konstanten liefert.

Die Gleichung n^{ter} Ordnung sei

$$\Phi(y) = V, \tag{1}$$

und es seien p partikulare und linear unabhängige Lösungen der Gleichung

$$\Phi(y) = 0 \tag{2}$$

bekannt. Man erhält eine allgemeinere partikulare Lösung der Gleichung (2), indem man

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_p y_p \tag{3}$$

setzt, wobei $C_1, C_2, \ldots C_p$ willkürliche Konstanten sind. Betrachtet man dieselben aber als Variabele, d. h. als Funktionen von x, so kann die Gleichung (3) auch die vollständige Lösung der Differentialgleichung (1) darstellen; man kann dabei noch $p-1$ willkürliche Relationen zwischen diesen Größen annehmen. Indem wir nun ebenso wie in Nr. 769 vorgehen, werden wir diese Relationen so wählen, daß die $p-1$ Ableitungen von y die nämlichen Ausdrücke gewinnen, wie wenn die willkürlichen Größen konstant sind. Wir setzen also:

$$\tag{4} \begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + y_p \dfrac{dC_p}{dx} = 0, \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{dy_p}{dx}\dfrac{dC_p}{dx} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{d^{p-2}y_1}{dx^{p-2}}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{p-2}y_2}{dx^{p-2}}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{p-2}y_p}{dx^{p-2}}\dfrac{dC_p}{dx} = 0, \end{cases}$$

und dann wird:

$$\tag{5} \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_p y_p \\ \dfrac{dy}{dx} = C_1 \dfrac{dy_1}{dx} + C_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \cdots + C_p \dfrac{dy_p}{dx}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = C_1 \dfrac{d^{p-1}y_1}{dx^{p-1}} + C_2 \dfrac{d^{p-1}y_2}{dx^{p-1}} + \cdots + C_p \dfrac{d^{p-1}y_p}{dx^{p-1}}. \end{cases}$$

Ferner setzen wir:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^{p-1}y_1}{dx^{p-1}}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{d^{p-1}y_2}{dx^{p-1}}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^{p-1}y_p}{dx^{p-1}}\dfrac{dC_p}{dx}=z,\\
\dfrac{d^{p}y_1}{dx^{p}}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{d^{p}y_2}{dx^{p}}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^{p}y_p}{dx^{p}}\dfrac{dC_p}{dx}=z_1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_p}{dx}=z_{n-p}
\end{cases}
$$

und schreiben noch zur Abkürzung:

$$
(7)\quad \begin{cases}
Z=z,\\
Z_1=\dfrac{dz}{dx}+z_1,\\
Z_2=\dfrac{d^2z}{dx^2}+\dfrac{dz_1}{dx}+z_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Z_{n-p}=\dfrac{d^{n-p}z}{dx^{n-p}}+\cdots+\dfrac{dz_{n-p-1}}{dx}+z_{n-p}.
\end{cases}
$$

Indem man nun die letzte der Gleichungen (5) differentiiert und alsdann die Differentiation wiederholt bis zur Ordnung $n-p+1$, bekommt man die Gleichungen:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^p y}{dx^p}=C_1\dfrac{d^p y_1}{dx^p}+C_2\dfrac{d^p y_2}{dx^p}+\cdots+C_p\dfrac{d^p y_p}{dx^p}+Z,\\
\dfrac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}}=C_1\dfrac{d^{p+1} y_1}{dx^{p+1}}+C_2\dfrac{d^{p+1} y_2}{dx^{p+2}}+\cdots+C_p\dfrac{d^{p+1} y_p}{dx^{p+1}}+Z_1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{d^n y}{dx^n}=C_1\dfrac{d^n y_1}{dx^n}+C_2\dfrac{d^n y_2}{dx^n}+\cdots+C_p\dfrac{d^n y_p}{dx^n}+Z_{n-p}.
\end{cases}
$$

Substituiert man nun in die Gleichung (1) die Werte von y und seinen n ersten Ableitungen aus den Systemen (5) und (8), so erhält man, weil $y_1, y_2, \dots y_p$ partikulare Lösungen der Gleichung (2) sind:

$$
(9)\qquad Z_{n-p}+P_1Z_{n-p-1}+\cdots+P_{n-p}Z=V.
$$

Nun bestimmt aber das aus den Gleichungen (4) und der ersten Gleichung (6) bestehende System die Gröſsen:

$$\frac{dC_1}{dx}, \quad \frac{dC_2}{dx}, \ldots \frac{dC_p}{dx}$$

als Funktionen von der Form

$$(10) \qquad \frac{dC_1}{dx} = X_1 z, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2 z, \ldots \frac{dC_p}{dx} = X_p z,$$

wobei die Gröfsen $X_1, X_2, \ldots X_p$ bestimmte gegebene Funktionen von x sind, da die Gröfsen $y_1, \ldots y_p$ voneinander linear unabhängig sind; ferner folgt aus den $n-p$ übrigen Gleichungen des Systemes (6):

$$(11) \qquad z_1 = \Xi_1 z, \quad z_2 = \Xi_2 z, \ldots z_{n-p} = \Xi_{n-p} z,$$

wobei $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_{n-p}$ ebenfalls gegebene Funktionen von x sind. Hieraus folgt, dafs die mit Z_k bezeichneten Gröfsen lineare Funktionen von z und seinen k ersten Ableitungen sind; mithin ist die Gleichung (9), auf die wir die ursprüngliche zurückgeführt haben, eine lineare Gleichung von der Ordnung $n-p$.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (9) enthält $n-p$ willkürliche Konstanten; ist diese Lösung bekannt, so hat man nach den Gleichungen (10):

$$(12) \quad C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} X_1 z\,dx, \; C_2 = c_2 + \int_{x_0}^{x} X_2 z\,dx, \ldots C_p = c_p + \int_{x_0}^{x} X_p z\,dx;$$

$c_1, c_2, \ldots c_p$ bezeichnen p neue willkürliche Konstanten. Vermittelst dieser Werte der C ergiebt die Gleichung (3) die vollständige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung; sie enthält n willkürliche Konstanten.

774. Anwendung auf Gleichungen zweiter Ordnung. Die lineare Gleichung zweiter Ordnung ist von der Form:

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = V,$$

P_1, P_2, V sind gegebene Funktionen von x. Nach der allgemeinen Theorie (Nr. 771) hängt die Integration dieser Gleichung nur noch von einer linearen Gleichung erster Ordnung ab, sobald man eine Lösung $y = y_1$ der zugehörigen Gleichung ohne zweites Glied kennt; da die Gleichung erster

Ordnung immer integriert werden kann, so kann man dann auch das vollständige Integral der Gleichung (1) bestimmen. Dieses Integral erhält man folgendermaſsen. Es ist der Voraussetzung nach:

$$\text{(2)} \qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P_1 \frac{dy_1}{dx} + P_2 y_1 = 0.$$

Subtrahiert man also die Gleichungen (1) und (2), nachdem man die erste mit y_1, die zweite mit y multipliziert hat, so folgt:

$$\left(y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2}\right) + P_1 \left(y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx}\right) = V y_1,$$

oder wenn man

$$\text{(3)} \qquad y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = z, \quad \text{also} \quad y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

setzt:

$$\text{(4)} \qquad \frac{dz}{dx} + P_1 z = V y_1.$$

Die vollständige Lösung dieser Gleichung ist (Nr. 675):

$$\text{(5)} \qquad z = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P_1 dx} \left[C_1 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x} P_1 dx} V y_1 dx \right];$$

die Gleichung (3) ergiebt ferner:

$$\frac{d \frac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{y_1^2},$$

also durch Integration:

$$\text{(6)} \qquad y = C y_1 + y_1 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{z}{y_1^2} dx.$$

Dieser Ausdruck enthält zwei willkürliche Konstanten C und C_1.

775. Ein Satz von Sturm. Eine Eigenschaft der Integrale der Gleichung ohne zweites Glied:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0,$$

welche Sturm bemerkt hat, wollen wir hier noch angeben. Es seien y_1 und y_2 zwei partikulare Integrale, mit denen man das vollständige Integral zusammensetzen kann. Es ist dann, wie eben bewiesen wurde (siehe auch den allgemeinen Determinantensatz der Nr. 768):

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C_1 e^{-\int_{x_0}^{x} P_1 dx}.$$

Hieraus folgt, daſs die Funktion

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}$$

immer dasselbe Zeichen hat, bei allen reellen Werten von x, solange wir ein Intervall betrachten, in welchem kein singulärer Punkt der Funktion P_1 gelegen ist, und in welchem also y_1 und y_2 ebenfalls regulär sind (vergl. Nr. 796). In solch einem Intervalle können auch y_1 und $\frac{dy_1}{dx}$ oder y_2 und $\frac{dy_2}{dx}$ nicht gleichzeitig verschwinden. Nehmen wir an, daſs

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} > 0$$

ist. Wenn die Funktion y_1 für $x = a$ und für $x = b$ verschwindet, so hat man für den einen sowie für den andern dieser Werte von x:

$$y_2 \frac{dy_1}{dx} < 0,$$

folglich sind y_2 und $\frac{dy_1}{dx}$ von entgegengesetztem Zeichen. Es sei nun $b > a$; wenn x von a bis b wächst, so ändert $\frac{dy_1}{dx}$ sein Zeichen für einen bestimmten Wert α von x; folglich muſs auch y_2 sein Zeichen ändern, bevor $x = b$ wird. Wenn also die Funktion y_2 regulär bleibt, so muſs sie für einen Wert von x zwischen a und b verschwinden. Ebenso erkennt man, daſs y_1, wenn es regulär bleibt, notwendig für einen Wert x verschwindet, der zwischen 2 Nullstellen von y_2 liegt.

Hieraus folgt, daſs, wenn x wächst und dabei ein Intervall durchläuft, in welchem kein singulärer Punkt von P_1 gelegen

ist, die Werte, für welche die Funktionen y_1 und y_2 verschwinden, abwechselnd aufeinander folgen müssen.

§ 2. Konstante Koeffizienten.

776. Die charakteristische Gleichung. Wir setzen wie in Nr. 769:

$$(1) \qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y,$$

$P_1, P_2, \ldots P_n$ seien Konstanten oder Funktionen von x; ferner setzen wir

$$(2) \qquad f(r) = r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n,$$

wobei die Konstante r noch unbestimmt ist; ersetzt man y durch die Exponentialfunktion e^{rx}, so wird

$$(3) \qquad \Phi(e^{rx}) = e^{rx} f(r).$$

Diese Gleichung (3) ist eine Identität; wir differentiieren sie $h$mal in Bezug auf r; die Ableitung h^{ter} Ordnung der linken Seite wird:

$$\frac{d^h \Phi(e^{rx})}{dr^h} = \Phi\left(\frac{d^h e^{rx}}{dr^h}\right) = \Phi(x^h e^{rx}).$$

Die Ableitung h^{ter} Ordnung der rechten Seite erhält man nach der Regel für die Differentiation eines Produktes in Nr. 73. Indem man die successiven Ableitungen des Polynomes $f(r)$ mit $f'(r), f''(r), \ldots$ bezeichnet, ergiebt sich:

$$(4) \quad \Phi(x^h e^{rx}) = e^{rx}\left[f^{(h)}(r) + hx f^{(h-1)}(r) + \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} x^2 f^{(h-2)}(r) + \cdots + x^h f(r)\right].$$

Wir betrachten nun die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung ohne zweites Glied:

$$(5) \qquad \Phi(y) = 0,$$

und gleichzeitig die entsprechende algebraische Gleichung

$$(6) \qquad f(r) = 0,$$

welche die zugehörige *charakteristische Gleichung* genannt wird.

Wenn diese letztere eine Wurzel r_1 besitzt, die keine Funktion von x ist, so erkennt man aus der Gleichung (3),

dafs die Differentialgleichung die partikulare Lösung $y = e^{r_1 x}$ hat. Ist ferner r_1 eine vielfache Wurzel und bezeichnet μ den Grad dieser Vielfachheit, so bestehen auch die Gleichungen:

$$f'(r_1) = 0, \quad f''(r_1) = 0, \ldots f^{(\mu-1)}(r_1) = 0;$$

folglich ergiebt die Gleichung (4) für die Werte $h = 1, 2, \ldots \mu - 1$:

$$\Phi(x^h e^{r_1 x}) = 0,$$

woraus folgt, dafs die Gleichung (1) die μ Lösungen

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \ldots x^{\mu-1} e^{r_1 x}$$

zuläfst.

Sind die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots P_n$ konstant, so hat die charakteristische Gleichung n, von x unabhängige Wurzeln, und folglich erhält man den Satz:

Satz. *Für eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmt jede Wurzel der charakteristischen Gleichung so viele partikulare Lösungen, als die Ordnung ihrer Vielfachheit beträgt. Es ist also die gesamte Anzahl dieser partikularen Integrale gleich der Ordnung der Differentialgleichung.*

777. Das Fundamentalsystem. Wir behaupten:

Die n soeben gefundenen Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.

Sind nämlich 1. die n Wurzeln von $f(r) = 0$ sämtlich voneinander verschieden, so sind:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \ldots y_n = e^{r_n x}$$

n Lösungen. Ihre Hauptdeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots \frac{dy_n}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \cdots \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots r_n \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht; denn sie ist gleich dem Produkte aus den Differenzen der Werte r.

Damit ist also bewiesen: Sind die Werte $r_1, r_2, \ldots r_n$ alle voneinander verschieden, so besteht zwischen den Funktionen $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots e^{r_n x}$ keine Identität von der Form:

$$a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + \cdots + a_n e^{r_n x} = 0,$$

wenn die Koeffizienten $a_1 \ldots a_n$ Konstante sind, die nicht sämtlich den Wert null haben.

Sind 2. allgemein h verschiedene Wurzeln von den Ordnungen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_h$ vorhanden, so hat man den Satz zu beweisen, daſs keine Relation von der Form

$$p_1 e^{r_1 x} + p_2 e^{r_2 x} + \cdots + p_h e^{r_h x} = 0$$

möglich ist, wenn $p_1, p_2, \ldots p_h$ Polynome vom Grade $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1, \ldots \mu_h - 1$ mit beliebigen Koeffizienten, die nicht sämtlich gleich null sind, bezeichnen. Der Beweis läſst sich folgendermaſsen führen: Angenommen, es gäbe solch eine Relation, alsdann differentiiere man dieselbe $h - 1$mal nacheinander; setzt man dann der Kürze wegen:

$$p_h^{(k)} = r_h^k p_h + k r_h^{k-1} \frac{\partial p_h}{\partial x} + \frac{k(k-1)}{1.2} r_h^{k-2} \frac{\partial p_h}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^k p_h}{\partial x^k},$$

so erhält man ein System von h Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned}
&p_1 e^{r_1 x} + p_2 e^{r_2 x} + \cdots + p_h e^{r_h x} = 0,\\
&p_1^{(1)} e^{r_1 x} + p_2^{(1)} e^{r_2 x} + \cdots + p_h^{(1)} e^{r_h x} = 0,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&p_1^{(h-1)} e^{r_1 x} + p_2^{(h-1)} e^{r_2 x} + \cdots + p_h^{(h-1)} e^{r_h x} = 0.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichungen bei allen Werten von x bestehen sollen, so muſs auch die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
p_1 & p_2 & \ldots p_h \\
p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \ldots p_h^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
p_1^{(h-1)} & p_2^{(h-1)} & \ldots p_h^{(h-1)}
\end{vmatrix}$$

identisch, d. h. bei allen Werten von x verschwinden. Der Koeffizient der höchsten Potenzen von x in dieser Determinante wird aber, abgesehen von den eingeführten konstanten Faktoren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ r_1 & r_2 & \dots r_k \\ \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots r_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

und verschwindet, da die Werte $r_1, r_2, \dots r_k$ voneinander verschieden sind, nicht.

778. D'Alemberts Methode. Wir haben vorhin bewiesen, daſs jede Wurzel der charakteristischen Gleichung ebenso viele partikulare Integrale liefert, als der Grad ihrer Vielfachheit beträgt. Doch läſst sich der Übergang von den ungleichen Wurzeln zu den vielfachen auch leicht vollziehen ohne diesen Satz, indem man eine allgemeine Methode von d'Alembert benutzt, welche bei verschiedenen Problemen der Analysis von Wert ist. Es sei wie gewöhnlich

$$\Phi(y) = 0 \tag{1}$$

die lineare und

$$f(r) = 0 \tag{2}$$

die charakteristische Gleichung. Wir wollen zunächst annehmen, daſs diese eine einzige vielfache Wurzel r_1 besitzt, und daſs der Grad ihrer Vielfachheit 2 ist. Wir bezeichnen nun mit

$$\Psi(y) = 0 \tag{3}$$

die lineare Differentialgleichung, welche zu der charakteristischen Gleichung:

$$\frac{(r - r_1 - h)f(r)}{r - r_1} = 0 \tag{4}$$

gehört, wobei h eine beliebige Zahl ist. Da diese Gleichung keine vielfachen Wurzeln besitzt, so ist das vollständige Integral der Gleichung (3):

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(r_1 + h)x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Nun ist aber:

$$e^{(r_1+h)x} = e^{r_1 x}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{2!} + \dots\right),$$

und setzt man

$$C_1 + C_2 = D_1, \quad C_2 h = D_2,$$

so wird der Wert von y:

$$y = e^{r_1 x}\left(D_1 + D_2 x + D_2 h \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x};$$

D_1 und D_2 sind zwei willkürliche Konstanten, welche man statt C_1 und C_2 einführen und von h unabhängig annehmen kann. Läſst man nun h null werden, so geht die Gleichung (3) in die Gleichung (1) über; zugleich wird der vorstehende Wert von y:

$$y = e^{r_1 x}(D_1 + D_2 x) + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

was mit dem früheren Resultate übereinstimmt.

Nehmen wir nun an, daſs die charakteristische Gleichung drei gleiche Wurzeln r_1 hat; die Gleichung (4) hat alsdann zwei Wurzeln gleich r_1 und eine Wurzel r_3 gleich $r_1 + h$; die allgemeine Lösung der Gleichung (3) ist folglich:

$$y = (D_1 + D_2 x) e^{r_1 x} + C_3 e^{(r_1 + h) x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

Entwickelt man e^{hx} in eine Reihe und setzt dabei:

$$D_1 + C_3 = E_1, \quad D_2 + C_3 h = E_2, \quad C_3 \frac{h^2}{2} = E_3,$$

so folgt:

$$y = \left(E_1 + E_2 x + E_3 x^2 + \frac{E_3 h}{3} x^3 + \cdots\right) e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

Wenn nun h nach null konvergiert, so erhält man als Grenzwert:

$$y = (E_1 + E_2 x + E_3 x^2) e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

und dies ist das Integral der linearen Gleichung in dem Fall einer dreifachen Wurzel r_1.

Indem man so fortfährt, erkennt man, daſs, wenn μ_1 den Grad der Vielfachheit der Wurzel r_1 bezeichnet, das vollständige Integral die Form bekommt:

$$y = P_1 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

wobei P_1 ein beliebiges Polynom in x vom Grade $\mu - 1$ ist; verfährt man ebenso in Bezug auf die anderen vielfachen Wurzeln, welche die Gleichung $f(r) = 0$ enthalten kann, so erhält man vollständig das Resultat, zu dem wir in Nr. 776 gelangt sind.

779. Unterscheidung von reellen und komplexen Wurzeln. Wir haben bisher keinerlei Voraussetzung über die Art der Wurzeln der charakteristischen Gleichung gemacht. Sind die Koeffizienten derselben reell, so treten im allgemeinen konjugiert komplexe Wurzeln in den Gliedern der Integralgleichung auf; man kann diese jedoch auf eine reelle Form bringen.

Sei

$$i = \sqrt{-1}$$

und seien

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

zwei konjugiert imaginäre Wurzeln; sind dieselben einfache, so gehören zu ihnen in dem Integrale die Glieder:

$$C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x),$$

die man durch

$$(A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

ersetzen kann, wenn man

$$A = C_1 + C_2, \quad B = (C_1 - C_2) i$$

setzt. Auch kann man

$$A = G \cos g, \quad B = - G \sin g$$

einführen, so dafs die beiden Terme den Wert:

$$G e^{\alpha x} \cos (\beta x + g)$$

annehmen. G und g sind alsdann die beiden willkürlichen Konstanten.

Man erkennt nun unmittelbar, dafs, wenn die beiden konjugierten Wurzeln r_1 und r_2 vielfache von der Ordnung μ sind, im allgemeinen Integrale die Glieder auftreten:

$$e^{\alpha x}[G \cos (\beta x + g) + G_1 x \cos (\beta x + g_1) + \cdots + G_{\mu-1} x^{\mu-1} \cos (\beta x + g_{\mu-1})];$$

$G, G_1 \ldots G_{\mu-1}, \; g, g_1 \ldots g_{\mu-1}$ bezeichnen $2\,\mu$ willkürliche Konstanten.

Für die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0$$

z. B., welche wir schon in Nr. 747 behandelt haben, wird die charakteristische Gleichung

$$r^2 + n^2 = 0,$$

und hieraus folgt

$$r = \pm in;$$

das vollständige Integral wird also:

$$y = A \cos nx + B \sin nx \quad \text{oder} \quad y = G \cos (nx + g).$$

780. Ausdehnung der Integrationsmethode für konstante Koeffizienten auf einen Fall von variabelen Koeffizienten. Der Satz der Nr. 776 ist bisweilen auch anwendbar auf lineare Gleichungen, in denen die Koeffizienten nicht sämtlich konstant sind. Wir wollen hierfür ein Beispiel geben.

Für die Gleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - (x+3)\frac{d^3 y}{dx^3} + 3(x+1)\frac{d^2 y}{dx^2} - (3x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

ist die charakteristische Gleichung:

$$(r-1)^3 (r-x) = 0;$$

sie hat drei gleiche Wurzeln mit dem Werte 1, und folglich wird der Differentialgleichung genügt, wenn man

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x$$

setzt. Da nun drei partikulare Lösungen bekannt sind, so kann man die Gleichung auf eine lineare erster Ordnung bringen, und sie folglich vollständig integrieren. Man gelangt indessen noch leichter zu diesem Resultat, wenn man bloſs die Lösung

$$y = Ce^x$$

anwendet. Betrachtet man C als variabel, so erhält man für C die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 C}{dx^4} + (1-x)\frac{d^3 C}{dx^3} = 0,$$

also wenn man

$$\frac{d^3 C}{dx^3} = u$$

setzt:

$$\frac{du}{dx} + (1-x)u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = (x-1)dx.$$

Demnach ist

$$lu = \frac{(x-1)^2}{2} + \text{const.};$$

also

$$u = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2}.$$

Folglich ist:

$$\frac{d^3 C}{dx^3} = c e^{\frac{1}{2}(x-1)^2},$$

und indem man nach der Methode der Nr. 741 integriert:

$$C = c\int_0^x (x-z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz + c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Das vollständige Integral ist also:

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) e^x + c e^x \int_0^x (x-z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz;$$

c_0, c_1, c_2, c sind vier willkürliche Konstanten.

781. Nicht homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Um das vollständige Integral der Gleichung

$$\Phi(y) = V \tag{1}$$

zu bilden, braucht man nur, wie wir gesehen haben, ein partikulares Integral dieser Gleichung zu kennen, und dieses zu dem vollständigen Integrale der reduzierten Gleichung

$$\Phi(y) = 0 \tag{2}$$

zu addieren. In Nr. 769 haben wir bewiesen, daſs man die partikulare Lösung durch die Gleichung

$$X = y_1 \int_{x_0}^x \frac{V dx}{\varphi_1(y_1)} + y_2 \int_{x_0}^x \frac{V dx}{\varphi_2(y_2)} + \cdots + y_n \int_{x_0}^x \frac{V dx}{\varphi_n(y_n)} \tag{3}$$

erhält. In derselben bezeichnen $y_1, y_2, \ldots y_n$ partikulare Lösungen der Gleichung (2), und $\varphi_k(y)$ stellt die Funktion

$$\lambda_0 y + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \lambda_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

dar, wobei die Koeffizienten λ so bestimmt sind, daſs

$$\varphi_k(y_1) = 0, \quad \varphi_k(y_2) = 0, \ldots \varphi_k(y_n) = 0$$

mit Ausnahme von

$$\varphi_k(y_k) = 0$$

Dieses Resultat wollen wir nun auf den Fall anwenden, daſs die Koeffizienten von $\Phi(y)$ konstant sind, und die charakteristische Gleichung keine gleichen Wurzeln hat. Hier ist $y_k = e^{r_k x}$ und $\varphi_k(y)$ ist das Produkt von e^{rx} mit dem Polynome:

$$\lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 r^2 + \cdots + \lambda_{n-2} r^{n-2} + r^{n-1},$$

welches null werden muſs, wenn man

$$r = r_1, \quad r_2, \ldots r_n$$

mit Ausnahme von r_k einsetzt. Hieraus folgt, daſs, wenn $f(r)$ die Funktion in der charakteristischen Gleichung bezeichnet:

$$\varphi_k(y) = e^{rx} \frac{f(r)}{r - r_k}$$

ist, und für $y = y_k$ oder $r = r_k$ wird:

$$\varphi_k(y_k) = e^{r_k x} f'(r_k).$$

Demnach ergiebt die Formel (3):

$$X = \frac{e^{r_1 x}}{f'(r_1)} \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} V dx + \frac{e^{r_2 x}}{f'(r_2)} \int_{x_0}^{x} e^{-r_2 x} V dx + \cdots + \frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)} \int_{x_0}^{x} e^{-r_n x} V dx. \tag{4}$$

Man erhält genau denselben Ausdruck, wenn man die Methode von Cauchy anwendet, die in Nr. 770 entwickelt wurde.

Es würde nicht schwierig sein, aus dieser Gleichung den Ausdruck abzuleiten für den Fall, daſs die charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln hat; doch halten wir es nicht für nötig, diese Untersuchung auszuführen. Man löst in jedem einzelnen Falle die Aufgabe leicht, indem man die allgemeine Formel (3) benutzt.

782. Beispiele. 1. Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

ergiebt zunächst für die reduzierte Form die Charakteristik

$$f(r) = r^2 - n^2 = 0,$$

also

$$r = \pm n;$$

folglich das Integral:

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

Da nun

$$f'(r) = 2r$$

ist und

$$\int e^{-rx} V dx = -\frac{e^{-rx} V}{r} + \frac{1}{r}\int e^{-rx}\frac{dV}{dx}dx,$$

so erhält man:

$$X = -\frac{1}{n^2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{nx}}{2n^2}\int_0^x \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{-nx}}{2n^2}\int_0^x \frac{e^{nx}dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

oder, wenn man α als Variabele unter dem Integral einführt:

$$X = \frac{1}{2n^2}\int_0^x \frac{\left[e^{\frac{n(x-\alpha)}{2}} - e^{-\frac{n(x-\alpha)}{2}}\right]^2}{\sqrt{1+\alpha^4}} d\alpha.$$

Das gesuchte Integral ist also:

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + X.$$

2. Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2n\frac{dy}{dx} + n^2 y = V$$

besitzt als Charakteristik der Reduzierten die Gleichung

$$(r-n)^2 = 0,$$

und die partikularen Integrale dieser letzteren sind

$$y_1 = e^{nx}, \quad y_2 = xe^{nx};$$

ferner hat man in den Bezeichnungen der Nr. 781

$$\varphi_1(y_1) = -\frac{e^{nx}}{x}, \quad \varphi_2(y) = e^{nx}.$$

Setzt man also:

$$X = -e^{nx}\int_{x_0}^{x} Vxe^{-nx}dx + xe^{nx}\int_{x_0}^{x} Ve^{-nx}dx,$$

so erhält man das vollständige Integral:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{nx} + X.$$

783. Spezielle Fälle. Ohne die allgemeinen Formeln zu benutzen, kann man auch in jedem besonderen Fall eine direkte Rechnung ausführen, nach der Methode, vermittelst deren wir zu jenen Formeln gelangt sind.

Wir müssen aber noch zwei Fälle angeben, bei denen man unmittelbar zur Kenntnis eines partikularen Integrales gelangt.

Erstens, wenn das zweite Glied V eine ganze Funktion ist:

$$V = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_{p-1}x + A_p,$$

so wird man

$$y = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x + a_p$$

setzen, und indem man diesen Wert in die Gleichung einführt, gewinnt man $p+1$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_p$ dienen.

Zweitens, wenn das zweite Glied V die Form hat:

$$V = A\cos\mu x + B\sin\mu x \quad \text{oder} \quad V = Ae^{\mu x i} + Be^{-\mu x i},$$

wo i die $\sqrt{-1}$ bedeutet, so hat man

$$y = a\cos\mu x + b\sin\mu x \quad \text{oder} \quad y = ae^{\mu x i} + be^{-\mu x i}$$

zu setzen, und man erhält zwei Gleichungen, aus denen man die Werte von a und b entnehmen kann. Dabei ist indessen zu bemerken, daſs diese Gleichungen auch unendliche Werte für a und b ergeben können, indem die Koeffizienten von a und b in den Gleichungen identisch verschwinden; in diesem Falle muſs man die Form des Wertes von y modifizieren.

Ist die gegebene Gleichung

$$\Phi(y) = V,$$

so hat man, was auch der Wert von μ sein mag:

$$\Phi(ae^{\pm x\mu i}) = ae^{\pm x\mu i}f(\pm \mu i)$$

und demnach, wenn man nach $\pm \mu i$ differentiiert:

$$\Phi(axe^{\pm x\mu i}) = ae^{\pm x\mu i}[f'(\pm \mu i) + xf(\pm \mu i)],$$

. . . .

Nach diesen Formeln kann man, wenn $f(\pm \mu i)$ nicht null ist,

$$y = ae^{\mu x i} + be^{-\mu x i}$$

setzen, oder, was auf das nämliche hinauskommt:

$$y = a \cos \mu x + b \sin \mu x.$$

Ist aber

$$f(\pm \mu i) = 0,$$

jedoch $f'(\pm \mu i)$ von null verschieden, so kann man

$$y = x(a \cos \mu x + b \sin \mu x)$$

setzen u. s. w.

Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x;$$

hier ist:

$$f(\pm \mu i) = -\mu^2 + 1, \quad f'(\pm \mu i) = 2\mu i,$$

und da μ gleich 1 sein mufs, so hat man zu setzen:

$$y = x(a \cos x + b \sin x),$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = x(-a \sin x + b \cos x) + (a \cos x + b \sin x),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -x(a \cos x + b \sin x) + 2(-a \sin x + b \cos x);$$

substituiert man diese Werte in die Gleichung, so folgt:

$$2(-a \sin x + b \cos x) = \cos x,$$

also:

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Man erhält demnach das partikulare Integral

$$\frac{1}{2} x \sin x,$$

und das vollständige ist:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

784. Ein Gleichungstypus, der auf konstante Koeffizienten zurückführt. Die linearen Gleichungen, um welche es sich hier handelt, sind von der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A_1}{ax+b}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}\, y = V;$$

$A_1, A_2, \ldots A_n$, a und b sind Konstanten, die rechte Seite V irgend eine Funktion von x.

Diese Gleichung kann in eine andere mit konstanten Koeffizienten transformiert werden; man hat zu diesem Zweck

$$ax + b = e^t$$

zu setzen, und t als unabhängige Variabele an Stelle von x einzuführen.

Es wird:

$$a\frac{dx}{dt} = e^t = ax + b, \quad \text{also} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b},$$

und folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Substituiert man diese Werte und multipliziert sodann die Gleichung mit $(ax+b)^n$, so erhält man eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Es ist indessen nicht notwendig, die Transformation auszuführen, um das Integral zu gewinnen. Denn schreibt man die Gleichung kurz:

$$(1) \qquad \Phi(y) = V,$$

so genügt es, das vollständige Integral von

$$(2) \qquad \Phi(y) = 0$$

zu bilden, und zu diesem gelangt man leicht auf folgendem Wege. Ersetzt man y durch $(ax+b)^r$ oder durch $e^{r\,l(ax+b)}$, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$\Phi[(ax+b)^r] = (ax+b)^{r-n} f(r),$$

wobei $f(r)$ ein ganzes Polynom in r vom Grade n ist. Differentiiert man nun diese Gleichung k-mal in Bezug auf r, so erhält man:

$$(3)\begin{cases} \Phi[(ax+b)^r l^k(ax+b)] \\ =(ax+b)^{r-n}\left[f^{(k)}(r)+\frac{k}{1}l(ax+b)f^{(k-1)}(r)+\cdots+l^k(ax+b)f(r)\right], \end{cases}$$

und es folgt aus den Gleichungen (2) und (3), daſs einer Wurzel r_1 der Charakteristik $f(r)=0$, deren Vielfachheit gleich μ ist, μ partikulare Integrale der Gleichung (2) entsprechen, nämlich:

$$(ax+b)^{r_1},$$
$$(ax+b)^{r_1}l(ax+b),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(ax+b)^{r_1}l^{\mu-1}(ax+b).$$

Ist r_1 komplex, so ist $(ax+b)^{r_1}$ gleich $e^{r_1 l(ax+b)}$.

Auf diese Weise kennt man also n partikulare Integrale der Gleichung (2), und aus ihnen kann man, wie wir wissen, das vollständige Integral der Gleichung (1) ableiten.

Beispiel. Die Gleichung zweiter Ordnung:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-(2n-1)x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$$

gehört zu der behandelten Klasse. Setzt man $y=x^r$ und unterdrückt den Faktor x^r, so erhält man als charakteristische Gleichung:

$$r(r-1)-(2n-1)r+n^2=0 \quad \text{oder} \quad (r-n)^2=0;$$

die beiden Wurzeln sind gleich n; und folglich werden die partikularen Integrale x^n, $x^n lx$; das vollständige Integral ist also:

$$y=x^n(C_1+C_2lx).$$

§ 3. Lineare Systeme.

785. Eliminationen, erläutert an Beispielen. Die Integration irgend eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen kann durch Elimination auf die Integration von einer oder mehreren Differentialgleichungen gebracht werden,

von denen jede nur zwei Variabele enthält. Es ist evident, daſs diese letzteren Gleichungen lineare sind, wenn die Gleichungen des Systemes lineare waren. Wir wollen nun zunächst zwei Beispiele für diese Methode behandeln.

1. Es seien zwei simultane Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0$$

gegeben; aus der zweiten entnimmt man:

$$y = \frac{dz}{dx} + z,$$

also durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx};$$

werden diese Werte in die erste Gleichung substituiert, so folgt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 4\frac{dz}{dx} + 4z = 0.$$

Diese Gleichung ist eine lineare mit konstanten Koeffizienten, ihr entspricht die charakteristische Gleichung

$$(r + 2)^2 = 0,$$

und ihr vollständiges Integral ist also, wenn C_1 und C_2 zwei willkürliche Konstanten bezeichnen:

$$z = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

Hieraus folgt dann:

$$y = [(C_2 - C_1) - C_2 x]e^{-2x}.$$

2. Wir wollen die beiden simultanen Gleichungen:

$$2\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0;$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

integrieren. Löst man dieselben nach y und $\frac{dy}{dt}$ auf, so erhält man die beiden folgenden:

$$11y = 2\frac{d^2x}{dt^2} - 11\frac{dx}{dt} + 14x + 2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

$$11\frac{dy}{dt} = 9\frac{d^2x}{dt^2} - 44\frac{dx}{dt} + 52x + 9\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Differentiiert man nun die erste derselben und subtrahiert vom Resultat die zweite, so folgt:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 10\frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 26x = \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Die charakteristische Gleichung wird hier:

$$f(r) = r^3 - 10r^2 + 29r - 26 = 0,$$

also ist:

$$f'(r) = 3r^2 - 20r + 29;$$

ferner ist, was auch die Funktion V sein mag:

$$\int e^{-rt} V dt = -\frac{1}{r}e^{-rt}V + \frac{1}{r}\int e^{-rt}\frac{dV}{dt}\,dt.$$

Man erkennt nun leicht, daſs man ein partikulares Integral der Gleichung für x erhält, wenn man die Summe der Werte bildet, welche der Ausdruck

$$\frac{9-2r}{2r(3r^2-20r+29)}e^{rt}\int_0^t \frac{e^{-rt}dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{9}{2r(3r^2-20r+29)}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

annimmt, wenn man für r die drei Wurzeln

$$2, \quad 4+\sqrt{3}, \quad 4-\sqrt{3}$$

der charakteristischen Gleichung einsetzt. Man bekommt demnach das vollständige Integral, wenn man hierzu die Summe:

$$C_1 e^{2t} + C_2 e^{(4+\sqrt{3})t} + C_3 e^{(4-\sqrt{3})t}$$

addiert, wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Konstanten sind. Nachdem sonach der Wert von x bekannt ist, findet man den Wert von y vermittelst einer der beiden obigen Gleichungen.

786. Systeme, die auf lineare zurückführen. Differentialgleichungen, welche nicht die lineare Form haben, können bisweilen auf diese Form durch Einführung neuer Variabelen gebracht werden. Als Beispiel hierfür betrachten wir die drei Differentialgleichungen, welche in der Formel:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x} \tag{1}$$

enthalten sind. Führt man eine neue Variabele t ein, deren Differential gleich ist diesen Verhältnissen, so erhält man die vier Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = x; \tag{2}$$

hieraus folgt, wenn man t als die unabhängige Variabele ansieht:

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad u = \frac{d^3x}{dt^3} \tag{3}$$

und

$$\frac{d^4x}{dt^4} - x = 0. \tag{4}$$

Die charakteristische Gleichung dieser letzten ist

$$r^4 - 1 = 0,$$

also:

$$r = \pm 1, \quad r = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Die beiden konjugiert imaginären Wurzeln führen in dem vollständigen Integrale der Gleichung (4) das Glied $C \cos(t - t_0)$ herbei, wo C und t_0 zwei willkürliche Konstanten sind. Die beiden zu den reellen Werten von r gehörigen Glieder kann man mit Ae^{t-t_0} und $Be^{-(t-t_0)}$ bezeichnen, wobei A und B neue willkürliche Konstanten sind. Da aber die Variabele t nur durch ihr Differential definiert ist, so kann man auch t an Stelle von $t - t_0$ setzen; folglich erhält man, da y, z, u durch die Gleichungen (3) bestimmt sind, das Integralsystem:

$$x = Ae^t + Be^{-t} + C \cos t,$$
$$y = Ae^t - Be^{-t} - C \sin t,$$
$$z = Ae^t + Be^{-t} - C \cos t,$$
$$u = Ae^t - Be^{-t} + C \sin t.$$

Setzt man

$$4C^2 = \alpha, \quad 16AB = \beta, \quad \log 4A = \gamma,$$

so folgt aus diesem Systeme:

$$\alpha = (x - z)^2 + (y - u)^2,$$
$$\beta = (x + z)^2 - (y + u)^2,$$
$$\gamma = l(x + y + z + u) + \text{arc tang}\,\frac{y - u}{z - x}.$$

787. Das allgemeine System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Eine bemerkenswerte Methode der Reduktion eines beliebigen Systemes von simultanen linearen Gleichungen verdankt man d'Alembert. Wir wollen annehmen, daſs das gegebene lineare System auf die erste Ordnung gebracht ist, indem man nötigenfalls neue Variabele eingeführt hat, wie dies in Nr. 733 gezeigt wurde, und behandeln zunächst den Fall von 2 Gleichungen.

Die beiden linearen Gleichungen seien:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz = V, \\ \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V'; \end{cases}$$

P, Q, P', Q', V, V' sind gegebene Funktionen der als unabhängig betrachteten Variabelen x. Addiert man diese beiden Gleichungen, nachdem man die zweite mit einem noch unbestimmten Faktor λ multipliziert hat, so erhält man

$$(2) \quad \left(\frac{dy}{dx} + \lambda\frac{dz}{dx}\right) + (P + \lambda P')y + (Q + \lambda Q')z = V + \lambda V'.$$

Wir bezeichnen mit t eine neue Variabele und setzen:

$$(3) \qquad y + \lambda z = t,$$

also:

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} + \lambda\frac{dz}{dx} + z\frac{d\lambda}{dx} = \frac{dt}{dx}.$$

Ersetzt man nun in der Gleichung (2) y und $\frac{dy}{dx}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen (3) und (4), so folgt:

$$\frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t - z\left[\frac{d\lambda}{dx} + (P + \lambda P')\lambda - (Q + \lambda Q')\right] = V + \lambda V'.$$

Man kann nun über den unbestimmten Faktor λ so verfügen, daſs die Variabele z aus dieser Gleichung verschwindet, d. h. also, daſs

$$\frac{d\lambda}{dx} + P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0 \tag{5}$$

wird, und folglich:

$$\frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t = V + \lambda V'. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist linear, und aus derselben folgt durch Integration:

$$t = e^{-\int\limits_{x_0}^{x}(P+\lambda P')dx}\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x}(P+\lambda P')dx}(V+\lambda V')dx\right] \tag{7}$$

oder, wie wir kurz schreiben wollen:

$$t = F(x, \lambda, C), \tag{8}$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist.

Die Gleichung (5), von welcher λ abhängt, ist nicht linear, aber man braucht auch nicht ihr vollständiges Integral zu kennen; zwei partikulare Integrale λ_1 und λ_2 genügen. Denn die Werte von t, welche diesen Werten von λ entsprechen, sind

$$y + \lambda_1 z, \quad y + \lambda_2 z;$$

die Gleichung (8) ergiebt also, wenn man nacheinander C_1 und C_2 an Stelle von C schreibt:

$$\begin{cases} y + \lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1), \\ y + \lambda_2 z = F(x, \lambda_2, C_2). \end{cases} \tag{9}$$

Jede derselben ist ein Integral des gegebenen Systemes.

788. Integration des Systemes von 2 Gleichungen bei konstanten Koeffizienten. Die Methode von d'Alembert führt direkt zur Bestimmung der Integrale linearer Differentialgleichungen, wenn die Koeffizienten konstant sind.

Es seien P, Q, P', Q' Konstante; wenn die quadratische Gleichung

$$P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0 \tag{10}$$

zwei ungleiche Wurzeln hat, $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, so hat man die beiden gesuchten Lösungen der Differentialgleichung (5), indem man $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ setzt. Man erhält hier:

$$t = e^{-(P+\lambda P')x}\left[C + \int_{x_0}^{x} e^{(P+\lambda P')x}(V + \lambda V')dx\right],$$

und die Gleichungen (9) werden also:

$$(11)\quad \begin{cases} y + \lambda_1 z = e^{-(P+\lambda_1 P')x}\left[C_1 + \int_{x_0}^{x} e^{(P+\lambda_1 P')x}(V + \lambda_1 V')dx\right], \\ y + \lambda_2 z = e^{-(P+\lambda_2 P')x}\left[C_2 + \int_{x_0}^{x} e^{(P+\lambda_2 P')x}(V + \lambda_2 V')dx\right]. \end{cases}$$

Ist $Q = 0$, so ist eine der Wurzeln λ_1, λ_2 gleich null; in diesem Falle ist eine der Gleichungen (11) das Integral der ersten der gegebenen Gleichungen, welche die Variabele z nicht enthält. Ist $P' = 0$, so ist eine der Wurzeln der Gleichung (10) unendlich; dieser Fall ist dem Falle, wo $Q = 0$ ist, analog. Die zweite der gegebenen Differentialgleichungen enthält y nicht, und läßt also z als Funktion von x bestimmen; y ist alsdann durch Integration der ersten Gleichung gegeben.

Sind die beiden Wurzeln einander gleich und λ_1 ihr Wert, so hat die Gleichung (5) die Form:

$$\frac{d\lambda}{dx} + P'(\lambda - \lambda_1)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2} + P'dx = 0.$$

Durch Integration erhält man:

$$-\frac{1}{\lambda - \lambda_1} + P'x = G, \quad \text{also} \quad \lambda - \lambda_1 = \frac{1}{P'x - G},$$

wobei G eine willkürliche Konstante bezeichnet. Es genügt für G zwei partikulare Werte einzusetzen, um zwei verschiedene Werte für λ zu bekommen, die wir brauchen. Setzt man $G = \infty$ und sodann $G = 0$, so erhält man:

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_1 + \frac{1}{P'x},$$

und die entsprechenden Werte von $e^{-\int_{x_0}^{x}(P+\lambda P')\,dx}$ sind:

$$e^{-(P+\lambda_1 P')x}, \quad \frac{1}{x}e^{-(P+\lambda_1 P')x}.$$

Bemerkung. Man kann auch bemerken, daſs die auf den besonderen Fall $\lambda_2 = \lambda_1$ bezüglichen Formeln leicht aus den Gleichungen (11) des allgemeinen Falles abgeleitet werden können. Denn die Gleichheit der Wurzeln λ hört auf, wenn man die Koeffizienten in passender Weise ändert; zu dem Zwecke genügt es, die Gleichung mit

$$\frac{\lambda - \lambda_1 - h}{\lambda - \lambda_1}$$

zu multiplizieren. Dabei können wir aber annehmen, daſs P und P' nicht verändert sind, daſs sich vielmehr diese Änderung nur auf die Koeffizienten Q und Q' erstreckt, die in den Gleichungen (11) nicht vorkommen. Nun können diese Integrale dargestellt werden in der Form:

$$y + \lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1),$$
$$y + (\lambda_1 + h)z = F(x, \lambda_1 + h, C_1 + hC_2),$$

indem man $C_1 + hC_2$ an Stelle von C_2 schreibt. Die zweite Gleichung kann nun durch

$$z = \frac{F(x, \lambda_1 + h, C_1 + hC_2) - F(x, \lambda_1 C_1)}{h}$$

ersetzt werden, und für den Grenzfall $h = 0$ reduziert sie sich auf:

$$z = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + C_2 \frac{\partial F}{\partial C_1}.$$

789. Beispiel. Die beiden, schon in Nr. 785 behandelten simultanen Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0$$

ergeben nach der Methode von d'Alembert:

$$\frac{dt}{dx} + (3 - \lambda)t = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\lambda}{(\lambda-1)^2} - dx = 0, \quad \text{also} \quad \lambda = 1 + \frac{1}{G-x}.$$

Man kann hier also

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{1}{x}$$

setzen. Sind dann t_1, t_2 die Werte von t, welche diesen Werten von λ entsprechen, so ist:

$$\frac{dt_1}{dx} + 2t_1 = 0, \quad \frac{dt_2}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)t_2 = 0,$$

also:

$$y + z = C_1 e^{-2x}, \quad y + z - \frac{z}{x} = C_2 \frac{e^{-2x}}{x}.$$

790. Das allgemeine System von beliebig vielen Gleichungen. Es seien n lineare Gleichungen erster Ordnung gegeben:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)}x_1 + P_2^{(1)}x_2 + \cdots + P_n^{(1)}x_n = V_1, \\ \frac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)}x_1 + P_2^{(2)}x_2 + \cdots + P_n^{(2)}x_n = V_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)}x_1 + P_2^{(n)}x_2 + \cdots + P_n^{(n)}x_n = V_n. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $P_i^{(k)}$ und die rechten Seiten V sind gegebene Funktionen der unabhängigen Variabelen x. Wir addieren diese Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit den unbestimmten Faktoren

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}, \ 1$$

multipliziert haben, und setzen ferner

$$(2) \qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n = t,$$

sodann:

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 P_1^{(1)} + \lambda_2 P_1^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1} P_1^{(n-1)} + P_1^{(n)} = \mathfrak{P}_1, \\ \lambda_1 P_2^{(1)} + \lambda_2 P_2^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1} P_2^{(n-1)} + P_2^{(n)} = \mathfrak{P}_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1 P_n^{(1)} + \lambda_2 P_n^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1} P_n^{(n-1)} + P_n^{(n)} = \mathfrak{P}_n \end{cases}$$

und

$$(4) \qquad \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_{n-1} V_{n-1} + V_n = \mathfrak{B}.$$

Man erhält:

$$\frac{dt}{dx} + \left(\mathfrak{P}_1 - \frac{d\lambda_1}{dx}\right) x_1 + \cdots + \left(\mathfrak{P}_{n-1} - \frac{d\lambda_{n-1}}{dx}\right) x_{n-1} + \mathfrak{P}_n x_n = \mathfrak{B}.$$

Wir ersetzen nun x_n durch seinen Wert aus der Gleichung (2) und benutzen die Unbestimmtheit der Faktoren λ, um die Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ zu eliminieren; die vorstehende Gleichung reduziert sich dann auf

$$\frac{dt}{dx} + \mathfrak{P}_n t = \mathfrak{B}, \tag{5}$$

und man bekommt zur Bestimmung von λ die $n-1$ Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\lambda_1}{dx} + \mathfrak{P}_n \lambda_1 - \mathfrak{P}_1 = 0, \\ \frac{d\lambda_2}{dx} + \mathfrak{P}_n \lambda_2 - \mathfrak{P}_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{d\lambda_{n-1}}{dx} + \mathfrak{P}_n \lambda_{n-1} - \mathfrak{P}_{n-1} = 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Die Gleichung (5) ist linear, aus ihr folgt:

$$t = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \mathfrak{P}_n dx} \left[C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x} \mathfrak{P}_n dx} \mathfrak{B} dx \right]; \tag{7}$$

C ist eine willkürliche Konstante.

Die $n-1$ Gleichungen (6) sind nicht linear; doch genügt es für unsern Zweck, n Systeme von Werten für die Gröfsen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ zu kennen, welche diese Gleichungen befriedigen. Denn bezeichnen wir allgemein mit

$$\lambda_1^{(i)}, \ \lambda_2^{(i)}, \ldots \lambda_{n-1}^{(i)},$$

wobei der Index i von 1 bis n variiert, irgend eines dieser Systeme und mit $t^{(i)}$ den Wert von t, welchen die Gleichung (7) ergiebt, wenn man daselbst den Faktoren λ die Werte $\lambda^{(i)}$ beilegt und C_i an Stelle von C schreibt, so hat man n Lösungen des simultanen Systemes von Differentialgleichungen, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1^{(1)} x_1 + \lambda_2^{(1)} x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(1)} x_{n-1} + x_n = t^{(1)}, \\ \lambda_1^{(2)} x_1 + \lambda_2^{(2)} x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(2)} x_{n-1} + x_n = t^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1^{(n)} x_1 + \lambda_2^{(n)} x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n)} x_{n-1} + x_n = t^{(n)}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Die Determinante der Koeffizienten auf der linken Seite darf nicht verschwinden, und alsdann erhält man aus diesen Gleichungen für $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Werte von der Form:

$$
(9) \quad \begin{cases} x_1 = T_1^{(1)}t^{(1)} + T_1^{(2)}t^{(2)} + \cdots + T_1^{(n)}t^{(n)}, \\ x_2 = T_2^{(1)}t^{(1)} + T_2^{(2)}t^{(2)} + \cdots + T_2^{(n)}t^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = T_n^{(1)}t^{(1)} + T_n^{(2)}t^{(2)} + \cdots + T_n^{(n)}t^{(n)}. \end{cases}
$$

Die Koeffizienten T sind Funktionen von λ.

Ist nun X_i der Wert, welchen x_i annimmt, wenn man den Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ den Wert null beilegt, ist ferner z_i der Wert, welchen x_i erhält, wenn man die rechten Seiten $V_1, V_2, \ldots V_n$ der gegebenen Differentialgleichungen null setzt, so ist aus der Gleichung (7) ersichtlich, daſs die Gleichungen (9) die Form erhalten:

$$x_1 = X_1 + z_1, \quad x_2 = X_2 + z_2, \ldots x_n = X_n + z_n.$$

Es besteht demnach der Satz:

Die Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche die vollständige Lösung des gegebenen simultanen Systemes (1) *bilden, werden erhalten, indem man zu den Werten $X_1, X_2, \ldots X_n$, welche eine partikulare Lösung ohne willkürliche Konstanten darstellen, diejenigen Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ addiert, welche eine vollständige Lösung desjenigen Gleichungssystemes bilden, das entsteht, wenn man in* (1) *die rechten Seiten durch* 0 *ersetzt.*

791. Das Fundamentalsystem. Es seien

$$x_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)}, \ldots x_n^{(i)}$$

n Lösungen des Gleichungssystemes (1). Dieses werde in dieser Nummer *homogen* angenommen, so daſs die rechten Seiten identisch verschwinden. Besteht nun kein *simultanes* Gleichungssystem von der Form:

$$
(10) \quad \begin{cases} \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)} + \cdots + \alpha_n x_1^{(n)} = 0, \\ \alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)} + \cdots + \alpha_n x_2^{(n)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \cdots + \alpha_n x_n^{(n)} = 0, \end{cases}
$$

in welchem die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ Konstante bezeichnen, so sagen wir, die n Lösungen bilden ein *Fundamentalsystem*. Es gilt nun der:

Satz I. *Seien*

$$x_1^{(i)},\quad x_2^{(i)}, \ldots x_n^{(i)},\quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

n Lösungen von (1), *die ein Fundamentalsystem bilden. Alsdann ist die Determinante der n Lösungen:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} x_1^{(2)} \ldots x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_2^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^{(1)} x_n^{(2)} \ldots x_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{11}$$

nicht identisch null.

Wäre die Determinante Δ null bei allen Werten von x, so könnte man jedenfalls n Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ angeben, so dafs die Gleichungen:

$$\begin{cases} u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_1^{(2)} + \cdots + u_n x_1^{(n)} = 0, \\ u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_2^{(2)} + \cdots + u_n x_2^{(n)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1 x_n^{(1)} + u_2 x_n^{(2)} + \cdots + u_u x_n^{(n)} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

identisch bestehen. Man braucht für die Funktionen u nur Werte einzusetzen, welche den Unterdeterminanten einer Horizontalzeile in der obigen Determinante Δ proportional sind, und von diesen kann man wieder annehmen, dafs sie nicht alle identisch verschwinden. Dann ist aber auch

$$u_1 \frac{dx_1^{(1)}}{dx} + u_2 \frac{dx_1^{(2)}}{dx} + \cdots + u_n \frac{dx_1^{(n)}}{dx} = 0,$$

$$u_1 \frac{dx_2^{(1)}}{dx} + u_2 \frac{dx_2^{(2)}}{dx} + \cdots + u^n \frac{dx_2^{(n)}}{dx} = 0,$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$u_1 \frac{dx_n^{(1)}}{dx} + u_2 \frac{dx_n^{(2)}}{dx} + \cdots + u_n \frac{dx_n^{(n)}}{dx} = 0,$$

wie man ohne weiteres erkennt, wenn man für die Differentialquotienten ihre Werte aus dem linearen Differentialgleichungssystem (1) einsetzt. Differentiiert man also das vorhergehende System, so ist:

$$(13)\quad \begin{cases} u'_1 x_1^{(1)} + u'_2 x_1^{(2)} + \cdots + u'_n x_1^{(n)} = 0, \\ u'_1 x_2^{(1)} + u'_2 x_2^{(2)} + \cdots + u'_n x_2^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u'_1 x_n^{(1)} + u'_2 x_n^{(2)} + \cdots + u'_n x_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

wobei u'_i die Ableitung von u_i bezeichnet Hieraus folgt im Zusammenhange mit den Gleichungen (12), daſs

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = \cdots = \frac{u'_n}{u_n}$$

ist; oder wenn man den gemeinsamen Wert dieser Quotienten mit ϱ bezeichnet:

$$(14)\qquad u_1 = \alpha_1 e^{\int \varrho\, dx}, \quad u_2 = \alpha_2 e^{\int \varrho\, dx}, \ldots u_n = \alpha_n e^{\int \varrho\, dx},$$

d. h. die Verhältnisse der Funktionen u sind konstant.

Umgekehrt gilt:

Satz II. *Sind*

$$(x_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)}, \ldots x_n^{(i)})$$

für $i = 1, 2, \ldots n$, n *Lösungen von* (1), *deren Determinante* Δ *nicht identisch verschwindet, so bilden diese ein Fundamentalsystem.*

In der That, bestünde ein simultanes System von der Form (1) identisch, so folgte daraus, daſs Δ identisch verschwindet.

Aus dem allgemeinen Existenztheorem (Nr. 719) folgt ferner, daſs in der Umgebung einer Stelle $x = x_0$, an welcher die P der Gleichungen (1) sich sämtlich regulär verhalten, immer eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ existiert, die sich für $x = x_0$ auf ein vorgeschriebenes System von Anfangswerten $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ reduziert. Die n Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ verhalten sich dann selbst in der Umgebung von x_0 regulär.

Man kann daher, wenn x_0 die angegebene Bedingung erfüllt, immer n Lösungen von (1) finden:

$$x_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)}, \ldots x_n^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

bei denen das zugehörige System von Anfangswerten:

$$a_1^{(i)}, \quad a_2^{(i)}, \ldots a_n^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

eine von 0 verschiedene Determinante:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, \dots a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, \dots a_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, \dots a_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ergiebt. Nun reduziert sich aber die Determinante Δ der n Lösungen für $x = x_0$ auf Δ_0. Also kann Δ nicht identisch verschwinden. Hieraus folgt die Existenz von Fundamentalsystemen:

Satz III. *Jedes System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches die Bedingungen des Existenztheorems der Nr. 719 erfüllt, besitzt immer Fundamentalsysteme von Lösungen.*

Endlich gilt:

Satz IV. *Sind*

$$(x_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)}, \dots x_n^{(i)})$$

für $i = 1, 2, \dots n$, *n Lösungen von* (1), *die ein Fundamentalsystem bilden, so besteht für jede andere Lösung* $(x_1, x_2, \dots x_n)$ *von* (1) *identisch ein Gleichungssystem der Form:*

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} + \cdots + C_n x_1^{(n)} \\ x_2 &= C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} + \cdots + C_n x_2^{(n)} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \cdots + C_n x_n^{(n)}, \end{aligned}$$

wo $C_1, C_2, \dots C_n$ *Konstante bedeuten.*

Jedenfalls kann man zu den $n + 1$ Lösungen

$$(x_1^{(i)} x_2^{(i)} \cdots x_n^{(i)}) \quad \text{und} \quad (x_1 x_2 \cdots x_n),$$

n Funktionen $u_1, u_2 \cdots u_n$ bestimmen, so daſs:

$$(15) \qquad x_k = u_1 x_k^{(1)} + u_2 x_k^{(2)} + \cdots + u_n x_k^{(n)}, \quad (k = 1, 2, \dots n)$$

wird; denn die Determinante Δ ist nicht identisch null. Setzt man diese Ausdrücke für die x_k in das System (1):

$$(1) \qquad \frac{dx_k}{dx} + P_1^{(k)} x_1 + P_2^{(k)} x_2 + \cdots + P_n^{(k)} x_n = 0 \;\; (k = 1, 2, \dots n),$$

ein, so wird der Koeffizient von u_i:

$$\frac{dx_k^{(i)}}{dx} + P_1^{(k)}x_1^{(i)} + P_2^{(k)}x_2^{(i)} + \cdots + P_n^{(k)}x_n^{(i)}$$

identisch null, weil

$$(x_1^{(i)},\quad x_2^{(i)}, \ldots x_n^{(i)})$$

eine Lösung darstellt. Also reduzieren sich die Gleichungen (1) nach Substitution der Ausdrücke (15) auf das System:

$$x_k^{(1)} \cdot \frac{du_1}{dx} + x_k^{(2)} \cdot \frac{du_2}{dx} + \cdots + x_k^{(n)} \cdot \frac{du_n}{dx} = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots n).$$

Da aber die Determinante Δ nicht identisch verschwindet, so ist gleichzeitig identisch:

$$\frac{du_1}{dx} = 0,\quad \frac{du_2}{dx} = 0, \ldots \frac{du_n}{dx} = 0,$$

d. h. die u sind sämtlich konstant und der Satz ist bewiesen.

Wir können also auch sagen:

In jedem Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung sind die n Funktionen

$$x_1,\quad x_2, \ldots x_n,$$

welche eine Lösung bilden, lineare homogene Funktionen der Integrationskonstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$.

Diese Thatsache wurde bereits in Nr. 709 benutzt.

792. Integration eines Systemes mit konstanten Koeffizienten. Erste Methode. Sind die Koeffizienten der gegebenen Gleichungen konstant, so existieren im allgemeinen n Systeme der unbestimmten Faktoren λ, die sich auf Konstante reduzieren. Denn nehmen wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ konstant an, so werden die Gleichungen (6):

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\lambda_1} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{P}_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = \frac{\mathfrak{P}_n}{1}.$$

Bezeichnet man also mit ϱ den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse, so erhält man, indem man für $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ ihre Werte (3) einsetzt:

$$(10)\quad \begin{cases} (P_1^{(1)} - \varrho)\lambda_1 + P_1^{(2)}\lambda_2 + \cdots + P_1^{(n-1)}\lambda_{n-1} + P_1^{(n)} = 0, \\ P_2^{(1)}\lambda_1 + (P_2^{(2)} - \varrho)\lambda_2 + \cdots + P_2^{(n-1)}\lambda_{n-1} + P_2^{(n)} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ P_n^{(1)}\lambda_1 + P_n^{(2)}\lambda_2 + \cdots + P_n^{(n-1)}\lambda_{n-1} + (P_n^{(n)} - \varrho) = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ zwischen diesen Gleichungen führt zu einer Gleichung

$$(11)\qquad F(\varrho) = 0$$

vom Grade n in ϱ, deren linke Seite die Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} P_1^{(1)} - \varrho & P_1^{(2)} & \cdots & P_1^{(n-1)} & P_1^{(n)} \\ P_2^{(1)} & P_2^{(2)} - \varrho & \cdots & P_2^{(n-1)} & P_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ P_n^{(1)} & P_n^{(2)} & \cdots & P_n^{(n-1)} & P_n^{(n)} - \varrho \end{vmatrix}.$$

Jeder Wurzel ϱ der Gleichung (11) entsprechen bestimmte Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, welche durch $n-1$ der Gleichung (10) geliefert werden. Sind also die Wurzeln der Gleichung (11) alle verschieden, so erhält man auf diese Weise die notwendige Anzahl von Systemen für die Faktoren λ. Die Gleichung (7), welche die rechten Seiten der Lösungen (8) bestimmt, wird hier

$$t = Ce^{-\varrho x} + e^{-\varrho x}\int_{x_0}^{x} e^{\varrho x}\mathfrak{V}\,dx.$$

Hat die Gleichung (11) gleiche Wurzeln, so giebt dieses Verfahren nicht n verschiedene Lösungen; man kann dann, um die Zahl derselben zu vervollständigen, einen Weg einschlagen, der dem für zwei Gleichungen benutzten ganz analog ist.

793. Integration nicht homogener Systeme nach Lagrange. Die in Nr. 766 ff. hinsichtlich der linearen Gleichungen ohne zweites Glied mit zwei Variabelen aufgestellten Eigenschaften lassen sich auf simultane Systeme linearer Gleichungen ohne weiteres ausdehnen. Kennt man ferner die Integrale eines Systemes ohne zweite Glieder, so ist es leicht, hieraus auch die Integrale des Systemes mit zweitem Gliede abzuleiten, sowohl vermittelst der Methode von Cauchy (Nr. 770), als

auch vermittelst der Variation der willkürlichen Konstanten. Wir wollen diese letztere Methode anwenden.

Wir betrachten die n Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)}x_1 + P_2^{(1)}x_2 + \cdots + P_n^{(1)}x_n = V_1, \\ \dfrac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)}x_1 + P_2^{(2)}x_2 + \cdots + P_n^{(2)}x_n = V_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)}x_1 + P_2^{(n)}x_2 + \cdots + P_n^{(n)}x_n = V_n \end{cases}$$

und nehmen an, dafs man ein System von n partikularen Lösungen für den Fall kennt, wo die rechten Seiten null sind, nämlich:

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\dots x_n^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\dots x_n^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\dots x_n^{(n)}. \end{array}$$

Dann ist evident, dafs man den nämlichen Gleichungen ohne zweites Glied genügt, wenn man

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} + \cdots + C_n x_1^{(n)}, \\ x_2 = C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} + \cdots + C_n x_2^{(n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \cdots + C_n x_n^{(n)} \end{cases}$$

setzt. Betrachtet man nun die willkürlichen Gröfsen C als variabel, so kann man die Gleichungen (2) als das Integralsystem der Gleichungen (1) ansehen. Dieses Verfahren ist, wie wir schon früher bemerkt haben, nichts anderes als eine Transformation der Variabelen.

Die Substitution der Werte (2) von $x_1, x_2, \dots x_n$ in die Gleichungen (1) ergiebt nach den Reduktionen, die aus unserer Annahme hervorgehen:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1^{(1)}\dfrac{dC_1}{dx} + x_1^{(2)}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + x_1^{(n)}\dfrac{dC_n}{dx} = V_1, \\ x_2^{(1)}\dfrac{dC_1}{dx} + x_2^{(2)}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + x_2^{(n)}\dfrac{dC_n}{dx} = V_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)}\dfrac{dC_1}{dx} + x_n^{(2)}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + x_n^{(n)}\dfrac{dC_n}{dx} = V_n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern für

$$\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_n}{dx}$$

bestimmte Werte, falls die Gleichungen (2) bei konstanten Werten der C wirklich die allgemeinen Integrale des Systemes ohne zweites Glied, d. h. auflösbar nach C sind. Man erhält sonach:

$$(4) \qquad \frac{dC_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{dC_n}{dx} = X_n,$$

wobei die Gröſsen $X_1, \ldots X_n$ bekannte Funktionen von x sind, und hieraus folgt:

$$(5) \qquad C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} X_1 dx, \quad \ldots \quad C_n = c_n + \int_{x_0}^{x} X_n dx,$$

$c_1, c_2, \ldots c_n$ sind willkürliche Konstanten.

794. Integration eines Systemes mit konstanten Koeffizienten. Zweite Methode. An Stelle der d'Alembertschen Methode kann man bei konstanten Koeffizienten auch das Verfahren benutzen, welches wir bei einer linearen Gleichung mit zwei Variabelen angewandt haben. Es seien die n Gleichungen ohne zweites Glied:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)} x_1 + P_2^{(1)} x_2 + \cdots + P_n^{(1)} x_n = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)} x_1 + P_2^{(2)} x_2 + \cdots + P_n^{(2)} x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)} x_1 + P_2^{(n)} x_2 + \cdots + P_n^{(n)} x_n = 0; \end{cases}$$

die Koeffizienten P sind konstant. Wir setzen:

$$(2) \quad x_1 = \lambda_1 e^{-\varrho x}, \quad x_2 = \lambda_2 e^{-\varrho x}, \ldots x_{n-1} = \lambda_{n-1} e^{-\varrho x}, \quad x_n = e^{-\varrho x},$$

und substituieren diese Werte in die Gleichungen (1); nach Unterdrückung des Faktors $e^{-\varrho x}$ erhält man:

$$(3) \qquad \begin{cases} (P_1^{(1)} - \varrho)\lambda_1 + P_2^{(1)}\lambda_2 + \cdots + P_{n-1}^{(1)}\lambda_{n-1} + P_n^{(1)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_1^{(n)}\lambda_1 + P_2^{(n)}\lambda_2 + \cdots + P_{n-1}^{(n)}\lambda_{n-1} + (P_n^{(n)} - \varrho) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind die nämlichen, wie die Gleichungen (10) in Nr. 792, und führen also auch durch Elimination der Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ auf die nämliche Gleichung n^{ten} Grades für ϱ; jeder Wurzel dieser Gleichung

$$F(\varrho) = 0 \tag{4}$$

entsprechen im allgemeinen bestimmte Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$.

Hat die Gleichung (4) n verschiedene Wurzeln, so kann man mittelst der Gleichungen (2) n Systeme von linear unabhängigen, partikularen Integralen bilden. Sind also

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \ldots \varrho_n$$

die n Wurzeln von ϱ,

$$\lambda_i^{(1)}, \quad \lambda_i^{(2)}, \ldots \lambda_i^{(n)}$$

die entsprechenden Werte von λ_i, und

$$C_1, \quad C_2, \ldots C_n$$

n willkürliche Konstanten, so werden die Integrale des gegebenen Systemes:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = C_1 \lambda_1^{(1)} e^{-\varrho_1 x} + C_2 \lambda_1^{(2)} e^{-\varrho_2 x} + \cdots + C_n \lambda_1^{(n)} e^{-\varrho_n x}, \\ x_2 = C_1 \lambda_2^{(1)} e^{-\varrho_1 x} + C_2 \lambda_2^{(2)} e^{-\varrho_2 x} + \cdots + C_n \lambda_2^{(n)} e^{-\varrho_n x}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_x = C_1 e^{-\varrho_1 x} + C_2 e^{-\varrho_2 x} + \cdots + C_n e^{-\varrho_n x}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Es ist leicht, in jedem Falle die Modifikation zu finden, denen diese Gleichungen zu unterwerfen sind, wenn einige der Wurzeln ϱ untereinander gleich werden. Was wir in der Bemerkung zu Nr. 788 darüber gesagt haben, erscheint uns ausreichend, und wir wollen bei dieser Frage nicht weiter verweilen.

795. Ein Satz von Jacobi. Wir halten es für nützlich, zum Schlusse dieses Kapitels noch ein bemerkenswertes Resultat anzugeben, welches von Jacobi gefunden ist und im Zusammenhange steht mit der Theorie, von der wir hier handeln.

Wir betrachten ein System von n beliebigen Differentialgleichungen *erster Ordnung* zwischen einer unabhängigen

Variabelen x und n abhängigen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Mit x'_i bezeichnen wir die Ableitung $\frac{d x_i}{d x}$ und mit

$$(1) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_n = 0$$

die gegebenen Differentialgleichungen. $F_1, F_2, \ldots F_n$ sind irgend welche Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und den Ableitungen $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$.

Wir nehmen an, dafs man die vollständigen Integrale des Systemes (1) kennt, und dafs dieselben nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgelöst sind; wir bezeichnen sie mit

$$(2) \qquad x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \ldots, \quad x_n = X_n;$$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ sind Funktionen von x und von n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Trägt man die Werte (2) in die Gleichungen (1) ein, so werden diese Identitäten, und man gewinnt aus ihnen neue Identitäten durch Differentiation nach den willkürlichen Konstanten. Differentiieren wir z. B. die Gleichung

$$F_i = 0$$

nach der willkürlichen Konstante a_μ, so folgt:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial a_\mu}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial F_i}{d x_n} \frac{\partial x_n}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial x'_n} \frac{d x'_n}{\partial a_\mu}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche identisch erfüllt ist nach der Substitution der Werte (2). Nun ist aber

$$\frac{\partial x'_k}{\partial a_\mu} \text{ gleich } \frac{\partial \frac{\partial x_k}{\partial a_\mu}}{\partial x};$$

wenn man also mit $U_i^{(k)}, V_i^{(k)}$ die Werte darstellt, welche

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x'_k}$$

nach Substitution der Werte (2) annehmen, so haben wir die Identität:

$$(3) \qquad \left[U_i^{(1)} \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu} + V_i^{(1)} \frac{\partial \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}}{\partial x}\right] + \cdots + \left[U_i^{(n)} \frac{\partial X_{(n)}}{\partial a_\mu} + V_i^{(n)} \frac{\partial \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}}{\partial x}\right] = 0.$$

Dies festgesetzt, betrachten wir die n linearen simultanen Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \left(U_1^{(1)} z_1 + V_1^{(1)} \frac{dz_1}{dx}\right) + \cdots + \left(U_1^{(n)} z_n + V_1^{(n)} \frac{dz_n}{dx}\right) = 0, \\ \left(U_2^{(1)} z_1 + V_2^{(1)} \frac{dz_1}{dx}\right) + \cdots + \left(U_2^{(n)} z_n + V_2^{(n)} \frac{dz_n}{dx}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \left(U_n^{(1)} z_1 + V_n^{(1)} \frac{dz_1}{dx}\right) + \cdots + \left(U_n^{(n)} z_n + V_n^{(n)} \frac{dz_n}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

in denen $z_1, z_2, \ldots z_n$ unbekannte Funktionen bezeichnen und die Größen U, V gegebene Funktionen von x und von n Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind. Auf Grund der Identität (3), welche bei jedem Wert von i gleich 1 bis i gleich n gilt, sind die Gleichungen (4) erfüllt, wenn man

$$z_1 = \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}, \quad z_2 = \frac{\partial X_2}{\partial a_\mu}, \ldots \quad z_n = \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}$$

setzt; also wird die vollständige Lösung der Gleichung (4):

$$(5)\quad \begin{cases} z_1 = C_1 \frac{\partial X_1}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_1}{\partial a_2} + \cdots + C_n \frac{\partial X_1}{\partial a_n}, \\ z_2 = C_1 \frac{\partial X_2}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_2}{\partial a_2} + \cdots + C_n \frac{\partial X_2}{\partial a_n}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ z_n = C_1 \frac{\partial X_n}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_n}{\partial a_2} + \cdots + C_n \frac{\partial X_n}{\partial a_n}. \end{cases}$$

wobei $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Konstante sind.

So führt also jedes System von simultanen Gleichungen, dessen vollständiges Integral bekannt ist, zu einem Systeme von linearen Differentialgleichungen mit variabelen Koeffizienten, dessen Integral alsdann durch einfache Differentiationen gewonnen wird.

Sechstes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen. Integration durch Reihen oder bestimmte Integrale.

---

§ 1. Reihenentwickelungen in der Umgebung einer regulären Stelle.

796. Formulierung des Existenztheorems. Es giebt in der Analysis keine allgemeine Methode, um die Integration der Differentialgleichungen auf Quadraturen zurückzuführen; man mufs daher bei der Lösung von Differentialgleichungen im allgemeinen die Methoden der Entwickelung in unendliche Reihen anwenden. Aber auch die Anwendung dieses Verfahrens wird bei nicht linearen Gleichungen schwierig, falls man sich nicht auf eine sehr kleine Anzahl von Gliedern beschränken kann, um auf diese Weise wenigstens eine angenäherte Darstellung des Integrales zu gewinnen. Wir stellen uns zunächst aber die Aufgabe, weniger die numerische, als die funktionentheoretische Bedeutung dieser Reihen ins Auge zu fassen, um dadurch unser allgemeines Existenztheorem (Nr. 719) für lineare Differentialgleichungen noch weiter zu ergänzen und einige Grundzüge des Verfahrens anzugeben, welches zur Integration vermittelst unendlicher Reihen dient.

Die Möglichkeit der Potenzreihenentwickelung läfst sich nämlich bei linearen Gleichungen bestimmter nachweisen, als bei den nicht linearen Gleichungen, weil bei den ersteren unmittelbar aus der Differentialgleichung erkannt werden kann, welche Stellen allein singuläre Punkte für das vollständige Integral werden können, so dafs der Konvergenzbereich der Potenzreihe, wenn ein beliebiger Punkt zum Mittelpunkte der Entwickelung gewählt ist, von vornherein festgestellt werden kann. Es wird daher nützlich sein, den allgemeinen Beweis

der Nr. 719 für eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung besonders zu betrachten in der Form, welche Herr **Fuchs** (Journ. f. Math., Bd. 66) ihm gegeben hat.

Es sei

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y$$

eine lineare Gleichung n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten analytische Funktionen von x sind, die innerhalb eines gegebenen Bereiches T der Ebene, deren Punkte die reellen und komplexen Werte von x darstellen, in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, im übrigen aber innerhalb dieser Fläche regulär sind. Diejenigen Punkte innerhalb T, für welche eine oder mehrere der Funktionen P unstetig sind, nennen wir *singuläre* Punkte. Es sei ferner x_0 irgend ein Punkt in T und um denselben ein Kreis beschrieben, welcher sich bis zum nächsten singulären Punkte erstreckt, so daſs also innerhalb dieses Kreises kein singulärer Punkt liegt; das Innere dieses Kreises nennen wir *das Gebiet des Punktes* x_0. Alsdann besteht der Satz:

Satz I. *Zu jedem Punkte x_0, der nicht zu den singulären gehört, giebt es eine in seinem Gebiete reguläre analytische Funktion y, welche der Differentialgleichung genügt und so beschaffen ist, daſs $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ beliebig gewählte Werte $b, b', \ldots b^{(n-1)}$ annehmen.*

Dieser Satz soll jetzt bewiesen werden.

797. Die Hilfsgleichung. In dem Gebiete von x_0 innerhalb T seien die Maxima der Beträge der Funktionen $P_1, P_2, \ldots P_n$ bezüglich $M_1, M_2, \ldots M_n$; ist p der dem Punkte x_0 zunächst liegende singuläre Punkt, und setzt man $|p - x_0| = R$, und

$$(2)\qquad \frac{M_1}{1-\frac{x-x_0}{R}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1-\frac{x-x_0}{R}} = \varphi_2, \cdots \frac{M_n}{1-\frac{x-x_0}{R}} = \varphi_n,$$

so ist bekanntlich für jedes ganzzahlige m (Nr. 643):

$$\left|\frac{d^m P_1}{dx^m}\right|_0 < m!\,\frac{M_1}{R^m}, \quad \left|\frac{d^m P_2}{dx^m}\right|_0 < m!\,\frac{M_2}{R^m}, \ldots \left|\frac{d^m P_n}{dx^m}\right|_0 < m!\,\frac{M_n}{R^m},$$

wenn wir mit dem Index 0 bezeichnen, daſs die Funktionen für $x = x_0$ zu bilden sind; also ist auch

$$(3)\quad \left|\frac{d^m P_1}{dx^m}\right|_0 < \left|\frac{d^m \varphi_1}{dx^m}\right|_0, \quad \left|\frac{d^m P_2}{dx^m}\right|_0 < \left|\frac{d^m \varphi_2}{dx^m}\right|_0, \ldots \left|\frac{d^m P_n}{dx^m}\right|_0 < \left|\frac{d^m \varphi_n}{dx^m}\right|_0.$$

Die sämtlichen Ableitungen einer Funktion, welche der linearen Differentialgleichung genügt, lassen sich auf die Form bringen ($k \geqq n$):

$$(4)\qquad \frac{d^k y}{dx^k} = \alpha_1^{(k)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \alpha_2^{(k)} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + \alpha_n^{(k)} y,$$

wobei die Koeffizienten α sich aus den Gröſsen P und deren Ableitungen durch die Operation der Addition und Multiplikation zusammensetzen.

Bildet man nun die lineare Differentialgleichung

$$(5)\qquad \frac{d^n \eta}{dx^n} = \varphi_1 \frac{d^{n-1} \eta}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-2} \eta}{dx^{n-2}} + \cdots + \varphi_n \eta,$$

so lassen sich die sämtlichen Ableitungen einer Funktion η, welche derselben genügt, in der Form darstellen:

$$(6)\qquad \frac{d^k \eta}{dx^k} = \beta_1^{(k)} \frac{d^{n-1} \eta}{dx^{n-1}} + \beta_2^{(k)} \frac{d^{n-2} \eta}{dx^{n-2}} + \cdots + \beta_n^{(k)} \eta.$$

Die Gröſsen β werden aus den entsprechenden Gröſsen α dadurch abgeleitet, daſs man an Stelle einer jeden Funktion P und ihrer Ableitungen die entsprechende Funktion φ und ihre entsprechenden Ableitungen einsetzt.

Hieraus folgt, daſs für den Wert $x = x_0$

$$\beta_1^{(k)} > |\alpha_1^{(k)}|, \quad \beta_2^{(k)} > |\alpha_2^{(k)}|, \ldots \beta_n^{(k)} > |\alpha_n^{(k)}|$$

ist. Mithin wird auch für $k \geqq n$:

$$\left|\frac{d^k y}{dx^k}\right|_0 < \left(\frac{d^k \eta}{dx^k}\right)_0,$$

falls für $k \leqq n-1$:

$$\left(\frac{d^k \eta}{dx^k}\right)_0 > \left|\frac{d^k y}{dx^k}\right|_0 = b^{(k)}$$

gewählt wird. Wir schlieſsen daher wie in Nr. 660 und 719, daſs die Potenzreihe für y mit der für η konvergiert.

Wenn sich also eine Funktion η bestimmen läfst, welche in dem Gebiete von x_0 regulär ist, ferner der Differentialgleichung (5) genügt und für $x = x_0$ nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen die soeben fixierten Werte annimmt, so existiert auch eine in dem Gebiete von x_0 reguläre Funktion y von der Beschaffenheit, dafs sie der Differentialgleichung (1) genügt und dafs

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

für $x = x_0$ die vorgeschriebenen Werte $b, b', \cdots b^{(n-1)}$ annehmen.

Setzt man

$$\frac{x - x_0}{R} = z,$$

so läfst sich die Gleichung (5) auf die Form bringen:

$$(7) \quad (1 - z)\frac{d^n\eta}{dz^n} = M_1 R \frac{d^{n-1}\eta}{dz^{n-1}} + M_2 R^2 \frac{d^{n-2}\eta}{dz^{n-2}} + \cdots + M_n R^n \eta.$$

Man kann derselben durch eine Potenzreihe

$$\eta = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

genügen; man erhält nämlich zur Bestimmung der Koeffizienten allgemein die Rekursionsformel:

$$(8) \begin{cases} (n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)a_{n+k} = (n+k-1)(n+k-2)\cdots(k+1)[k+M_1R]a_{n+k-1} \\ \qquad + (n+k-2)(n+k-3)\cdots(k+1)M_2R^2 a_{n+k-2} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + M_n R^n a_k. \end{cases}$$

798. Konvergenzbeweis. Wählt man die Anfangsglieder $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ positiv, so werden auch alle übrigen Koeffizienten positiv; und es ist:

$$a_{n+k} = \frac{k + M_1 R}{n + k} a_{n+k-1} + \psi,$$

wobei ψ eine positive Gröfse ist.

Man kann nun annehmen, dafs $M_1 R > n$ ist. Denn, wenn dieses nicht stattfindet, so bleiben alle früheren Schlüsse giltig, wenn man M_1 so grofs annimmt, dafs diese Bedingung erfüllt ist; also ist

$$a_{n+k} > a_{n+k-1}$$

für jedes ganzzahlige k, d. h. die Koeffizienten der Reihe wachsen mit wachsendem Index. Ist also $r < s$, so wird $\frac{a_r}{a_s}$ nicht unendlich für wachsende Werte von r und s. Aus der Gleichung (8) folgt nun:

$$\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} = \frac{k + M_1 R}{n+k} + \frac{M_2 R^2}{(n+k)(n+k-1)} \frac{a_{n+k-2}}{a_{n+k-1}} + \cdots$$
$$+ \frac{M_n R^n}{(n+k)(n+k-1)\cdots k+1} \cdot \frac{a_k}{a_{n+k-1}}.$$

Hieraus folgt für $k = \infty$:

$$\lim \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} = 1,$$

und also ist

$$\lim \frac{z^{n+k} a_{n+k}}{z^{n+k-1} a_{n+k-1}} = z$$

für $k = \infty$, d. h. die Reihe für u ist konvergent, solange der Betrag von z kleiner als 1 ist. Die Differentialgleichung (5) hat also ein in dem Gebiete von x_0 giltiges Integral der Form

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

derart, dafs $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ beliebige positive Werte erhalten können, und hiermit ist die Existenz einer Funktion y von der geforderten Beschaffenheit für das Gebiet des Punktes x_0 bewiesen.

Hieraus folgt auch die Existenz eines Fundamentalsystemes solcher Funktionen. Denn wählt man den Anfangswert $b^{(i)}$ gleich 1, alle übrigen $b, b' \ldots b^{(n-1)}$ aber gleich 0, so entsteht ein partikulares Integral y_i. Für $i = 0, 1, 2 \cdots n-1$ erhält man n Integrale, deren Hauptdeterminante Δ (Nr. 768) für $x = x_0$ gleich 1 ist, also nicht identisch verschwindet. Die gefundenen Integrale bilden also ein Fundamentalsystem.

§ 2. Reihenentwickelungen in der Umgebung einer singulären Stelle.

799. Fragestellung. Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz gilt für einen singulären Punkt nicht mehr; es ist eben-

sowohl möglich, daſs keine einzige Funktion existiert, welche der Differentialgleichung genügt und in dem Gebiete des singulären Punktes regulär ist, wie auch, daſs n partikulare Funktionen dieser Art, welche ein Fundamentalsystem bilden, vorhanden sind.

Grundlegend wird hierbei die Unterscheidung von Herrn Fuchs zwischen „Stellen der Bestimmtheit“ (Nr. 806) und anderen singulären Stellen. Daſs an einer Stelle der Bestimmtheit immer eine Lösung existiert, werden wir beweisen und ihre Beschaffenheit untersuchen. Für andere Fälle geben wir nur Beispiele und beginnen auch jetzt zunächst mit der Betrachtung eines Beispiels.

800. Beispiel. Wir betrachten die lineare Gleichung zweiter Ordnung, welche bei verschiedenen Problemen der mathematischen Physik auftritt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0. \tag{1}$$

Der Punkt $x = 0$ ist der einzige singuläre Punkt im endlichen, n und m^2 bezeichnen zwei reelle, positive oder negative, gegebene Zahlen. Wir multiplizieren die Gleichung mit x und differentiieren sie alsdann $\mu - 1$ mal; es wird

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} - m^2xy = 0, \tag{2}$$

$$\left[x\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} + (\mu-1)\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}\right] + 2n\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} - m^2\left[x\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + (\mu-1)\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}\right] = 0. \tag{3}$$

Für $x = 0$ ergeben diese Gleichungen, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ endlich sein sollen:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (2n + \mu - 1)\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} = (\mu - 1)m^2\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}. \tag{4}$$

Die erste Gleichung (4) lehrt, daſs y' für $x = 0$ nicht mehr willkürlich gewählt werden kann, die zweite Gleichung liefert für $\mu = 2$:

$$(2n + 1)\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y. \tag{5}$$

Man erkennt, daſs, wenn $2n$ nicht eine ganz negative Zahl ist, die Ableitungen ungerader Ordnung null sind,

während die Ableitungen gerader Ordnung durch die Formel geliefert werden:

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k-1)} m^{2k} y.$$

Bezeichnet also C den willkürlichen Wert von y, welcher zu $x=0$ gehört, so ergiebt die Mac-Laurinsche Formel eine partikulare Lösung der Gleichung (1):

$$(6)\quad y = C\Big[1 + \frac{m^2x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)} + \frac{m^6x^6}{2.4.6.(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \cdots\Big].$$

Diese Formel wird illusorisch, wenn $2n$ gleich einer ganzen negativen ungeraden Zahl ist. Lassen wir aber diesen Fall vorerst beiseite, so ist die Reihe bei allen endlichen Werten von x konvergent, denn das Verhältnis des $k+1^{\text{ten}}$ Gliedes zum k^{ten} ist:

$$\frac{m^2x^2}{2k.(2n+2k-1)}$$

und konvergiert also nach null, wenn k unendlich wird.

Hier existiert also, abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor, eine und nur eine Lösung, die in dem Gebiete von $x=0$ (d. i. in der ganzen Ebene) regulär ist, es ist diejenige, deren Ableitung für $x=0$ verschwindet.

801. Ausnahmefall. Untersuchen wir nun den Fall, wo $2n$ gleich einer ganzen negativen Zahl ist. Ist diese ganze Zahl ungerade, so sieht man aus den Gleichungen (4), daſs die Ableitungen ungerader Ordnung für $x=0$ null sind, wie in dem allgemeinen Fall. Dieselbe Gleichung lehrt auch, daſs

$$\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}} = 0$$

ist für $\mu = 1-2n$, wenn die höheren Ableitungen endlich bleiben sollen, und folglich ist:

$$y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \ldots\ \frac{d^{-1-2n}y}{dx^{-1-2n}}=0.$$

Die Ableitung $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ kann nun willkürlich gewählt werden; aber alle folgenden Ableitungen gerader Ordnung sind dann bestimmt. Bezeichnet man also mit C_1 den willkürlichen Wert von

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(1-2n)}\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$$

für $x=0$, so giebt die Mac-Laurinsche Entwickelung:

$$(7)\qquad \begin{cases} y = C_1 x^{1-2n}\Big[1 + \frac{m^2x^2}{2.(3-2n)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} \\ \qquad + \frac{m^6x^6}{2.4.6.(3-2n)(5-2n)(7-2n)} + \cdots\Big]. \end{cases}$$

Ist $2n$ eine ganze negative, gerade Zahl, so werden die Ableitungen ungerader Ordnung für $x=0$ ebenfalls null, nach den Gleichungen (4), bis zu denjenigen, deren Ordnung $-1-2n$ ist. Der Wert der Ableitung $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ kann willkürlich gewählt werden, wie in dem vorigen Fall, und die Ableitungen gerader Ordnung, welche auf diese folgen, sind dann bestimmt. Andererseits ist auch der Wert von y für $x=0$ willkürlich in diesem Falle, und er bestimmt die Werte der Ableitungen gerader Ordnung. Also giebt die Mac-Laurinsche Formel hier eine Lösung, welche zwei willkürliche Konstanten enthält, und die man durch Addition der in den Gleichungen (6) und (7) enthaltenen Reihen bilden kann. Diese Lösung ist also die allgemeine.

Man kann die letztere in allen Fällen durch die Taylorsche Entwickelung gewinnen, indem man einen beliebigen anderen Punkt x_0 zum Mittelpunkt der Reihenentwickelung macht; die Koeffizienten sind aus den Gleichungen (2) und (3) zu berechnen, und die Reihe konvergiert (Nr. 796), solange $|x-x_0|<|x_0|$ ist. Das Resultat ist indessen kompliziert, und die Ausführung der Rechnung bietet weiter kein Interesse.

802. Transformation der Variabelen. Wir haben soeben ein partikulares Integral der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$

erhalten; um das vollständige Integral zu bilden, mufs man ein zweites partikulares kennen, und da dieses im allgemeinen nicht nach der Formel von Mac-Laurin entwickelbar ist, so ist es angezeigt, zu untersuchen, ob nicht durch eine Änderung der Variabelen die Anwendung dieser Formel zulässig wird. Zu dem Zwecke setzen wir

$$y = x^\mu z,$$

wobei μ ein noch unbestimmter Exponent und z eine neue Variabele ist. Die Differentiation liefert:

$$\frac{dy}{dx} = x^\mu \frac{dz}{dx} + \mu x^{\mu-1} z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^\mu \frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu x^{\mu-1} \frac{dz}{dx} + \mu(\mu - 1)x^{\mu-2} z.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung (1) ein und dividiert alsdann dieselbe durch x^μ, so folgt:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2n+2\mu}{x}\frac{dz}{dx} + \left[\frac{\mu(2n+\mu-1)}{x^2} - m^2\right] z = 0.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die vorige, wenn man

$$\mu = 1 - 2n$$

annimmt; alsdann wird sie:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2(1-n)}{x}\frac{dz}{dx} - m^2 z = 0, \tag{2}$$

und folgt also aus der Gleichung (1), indem man dort n in $1 - n$ verwandelt; man führt also den Fall, dafs n negativ ist, auf den Fall, dafs n positiv ist, zurück. Nun ist evident, dafs man ein neues partikulares Integral der Gleichung (1) bekommt, indem man n in $1 - n$ verwandelt in dem Integrale, welches wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben, und dieses noch mit x^{1-2n} multipliziert.

Mit den beiden partikularen Integralen läfst sich das vollständige bilden, wie wir es schon für den Fall, dafs $2n$ eine ganze negative gerade Zahl ist, erhalten haben, nämlich:

$$\begin{cases} y = C\left[1 + \frac{m^2x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} + \cdots\right] \\ \quad + C'x^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} + \cdots\right]. \end{cases} \tag{3}$$

C und C' sind zwei willkürliche Konstanten. Dabei mufs man noch immer den Fall, dafs $2n$ eine ganze ungerade, positive oder negative Zahl ist, ausnehmen. Ist $2n = 1$, so werden die beiden partikularen Integrale identisch, und wenn $2n$ eine ganze ungerade Zahl verschieden von $+1$ ist, so wird eines der beiden Integrale illusorisch. Wir kommen später noch auf diese Ausnahmefälle zurück.

803. Spezialfall. Der Fall $n = 1$ mag noch besonders bemerkt werden; man kann hier leicht die Summen der beiden Reihen durch elementare Funktionen ausdrücken. Schreibt man Cm an Stelle von C, so wird die Gleichung (3):

$$y = \frac{C}{x}\left(\frac{mx}{1} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} + \frac{m^5x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{C'}{x}\left(1 + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^4x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)$$

oder:

$$y = \frac{C}{x} \cdot \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + \frac{C'}{x} \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}.$$

Bezeichnet man mit A und B zwei neue willkürliche Konstanten, so kann man auch schreiben:

$$y = \frac{Ae^{mx} + Be^{-mx}}{x}.$$

Die Transformation, welche wir in dem vorigen Paragraphen ausführten, liefert dieses Resultat unmittelbar; denn für $n = 1$ reduziert sich die Gleichung (2) auf

$$\frac{d^2z}{dx^2} - m^2z = 0,$$

und ihr vollständiges Integral ist:

$$z = Ae^{mx} + Be^{-mx}.$$

Wenn m^2 negativ ist, und man setzt

$$m^2 = -\mu^2,$$

so läfst sich das Integral auch schreiben:

$$y = \frac{C \sin \mu x + C' \cos \mu x}{x}.$$

804. Die spezielle Riccatische Gleichung. Die Riccatische Gleichung, mit der wir uns schon in Nr. 698 beschäftigt haben, ist:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \tag{1}$$

a und b sind gegebene Konstanten, m ein beliebiger Exponent. Man kann die Gleichung auf eine lineare bringen, indem man

$$y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx} \tag{2}$$

setzt; also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{az^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2;$$

aus dieser Substitution folgt:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = abx^m z. \tag{3}$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist von der Form:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2;$$

trägt man diesen Wert in die Formel (2) ein, und setzt man dabei

$$\frac{C_2}{C_1} = C,$$

so erhält man:

$$y = \frac{1}{a}\,\frac{\frac{dz_1}{dx} + C\frac{dz_2}{dx}}{z_1 + Cz_2}. \tag{4}$$

Diese Gleichung, welche eine willkürliche Konstante enthält, ist das vollständige Integral der Riccatischen Gleichung. Es sind also die beiden partikularen Lösungen z_1 und z_2 zu bestimmen. Man kann dieselben ohne Schwierigkeit durch Reihen darstellen, indem man die Methode der unbestimmten Koeffizienten anwendet; indessen läfst sich diese neue Rechnung dadurch vermeiden, dafs man die Gleichung (3) auf die vorher von uns behandelte Form bringt. Denn setzen wir:

$$x^{\frac{m+2}{2}} = t,$$

und wählen t zur unabhängigen Variabelen an Stelle von x, so wird:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m+2}{2} x^{\frac{m}{2}} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{(m+2)^2}{4} x^m \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{m^2+2m}{4} x^{\frac{m-2}{2}} \frac{dz}{dt}.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung (3) ein, so folgt:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} - \frac{4ab}{(m+2)^2} z = 0. \tag{5}$$

Zugleich erhält man nach der Formel (4):

$$y = \frac{(m+2)x^{\frac{m}{2}}}{2a} \frac{\frac{dz_1}{dt} + C\frac{dz_2}{dt}}{z_1 + Cz_2},$$

wenn z_1 und z_2 zwei voneinander unabhängige partikulare Integrale der Gleichung (5) sind. Man sieht, daſs diese Gleichung die nämliche ist, wie die in Nr. 800 ff. behandelte. Ihr Integral kann (Nr. 813, vorletzter Absatz) in endlicher Form dargestellt werden, wenn

$$\frac{m}{m+2}$$

eine ganze gerade Zahl $\pm 2i$ ist, d. h. wenn m die Form hat:

$$m = \frac{-4i}{1 \mp 2i}.$$

So findet man also wieder den Fall der Integrabilität durch elementare Funktionen, den wir schon in Nr. 700 erhalten haben.

Nach diesen Beispielen gehen wir daran, die Betrachtungen der Nr. 802 zu verallgemeinern und fragen uns, unter welchen Bedingungen wir die Existenz einer Lösung beweisen können, die — wie die in Nr. 802 aufgestellte — nach Multiplikation mit einer gewissen Potenz von $x - x_0$ regulär ist. Zu dem Zwecke führen wir zunächst den Begriff der „determinierenden Gleichung“ ein.

805. Die determinierende Gleichung. Wir untersuchen die lineare Differentialgleichung:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0 \tag{1}$$

in der Umgebung einer singulären Stelle $x = x_0$, d. h. einer solchen, an welcher die Quotienten

$$\frac{P_1}{P_0}, \frac{P_2}{P_0}, \dots \frac{P_n}{P_0}$$

nicht sämtlich regulär, d. h. nach dem Taylorschen Satze entwickelbar sind. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daſs diese Quotienten, soweit sie nicht regulär sind an der Stelle $x = x_0$, es doch dadurch werden, daſs man sie mit einer Potenz von $x - x_0$ mit ganzen positiven Exponenten multipliziert. Solche singuläre Stellen nennt man *Pole*. Unsere Bedingung ist jedenfalls dann immer erfüllt, wenn alle P ganze rationale Funktionen von x sind. Die Pole sind dann die Nullstellen von P_0 und eventuell der unendlich ferne Punkt $x = \infty$. Allgemein können wir, wenn unsere Bedingung erfüllt ist, die Koeffizienten $P_0, P_1, \dots P_n$ selbst als regulär voraussetzen, nur daſs jetzt die Funktion $P_0(x)$ an der betrachteten Stelle von einer gewissen, ganzzahligen Ordnung verschwindet. Wir können es auch durch Multiplikation mit einer geeigneten ganzzahligen Potenz von $x - x_0$ erreichen, daſs die Koeffizienten die Form annehmen:

$$(x - x_0)^n P_0, \quad (x - x_0)^{n-1} P_1, \dots\dots, P_n,$$

wo die neuen Funktionen P_k in der Umgebung von $x = x_0$ ebenfalls sämtlich regulär sind und für $x = x_0$ nicht alle gleichzeitig verschwinden. So haben wir die Differentialgleichung in ihrer „Normalform“:

$$(2) \qquad (x - x_0)^n P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + (x - x_0)^{n-1} P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n y = 0.$$

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir $x_0 = 0$ annehmen; man braucht ja nur, um dies zu erreichen, $x - x_0$ als neue Veränderliche einzuführen. Alsdann erhält die Differentialgleichung, von der wir ausgehen, die Form:

$$(2a) \quad x^n P_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} P_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x) \cdot y = 0,$$

wo die $P_n(x)$ sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhalten. Entsprechend der Nr. 802 versuchen wir nun, die

Gleichung (2a) zu befriedigen durch eine in der Umgebung von $x = 0$ konvergente Reihe der Form:

(3) $y = x^{\alpha} + c_1 x^{\alpha+1} + c_2 x^{\alpha+2} + \cdots = x^{\alpha}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$,

wo über den Exponenten α passend zu verfügen sein wird. Alsdann nehmen auch die Ableitungen von y eine analoge Form an:

$$\frac{d^{\lambda} y}{dx^{\lambda}} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lambda+1)x^{\alpha-\lambda} + c_1(\alpha+1)\cdots(\alpha-\lambda+2)x^{\alpha-\lambda+1} + \cdots$$

Die linke Seite der Differentialgleichung (2) läſst sich dann gleichfalls durch eine solche Potenzreihe darstellen und ihre Koeffizienten müssen sämtlich verschwinden. So ergiebt der Koeffizient der niedrigsten Potenz x^{α} die Gleichung:

(4) $$F(\alpha) \equiv \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)P_0(0) + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)P_1(0) + \cdots + \alpha P_{n-1}(0) + P_n(0) = 0,$$

die als die *„determinierende Gleichung"* der Differentialgleichung an der Stelle $x = 0$ bezeichnet wird. Diese Gleichung enthält keinen der Koeffizienten c_{λ} und kann zur Bestimmung des Exponenten α dienen, wenn nicht alle Koeffizienten

$$P_k(0), \qquad (k = 0, 1, \ldots n - 1)$$

verschwinden. Ist $P_r(0)$ die erste von 0 verschiedene dieser Gröſsen

$$P_1(0), \quad P_2(0), \ldots,$$

so ist $n - r$ der Grad der determinierenden Gleichung, und sie besitzt höchstens $n - r$ verschiedene Wurzeln α. Soll diese Gradzahl $= n$ sein, so muſs schon

$$P_0(0) \neq 0$$

sein, so daſs die Quotienten

$$\frac{P_1(x)}{P_0(x)}, \ldots \frac{P_n(x)}{P_0(x)}$$

an der Stelle $x = 0$ regulär bleiben. Ist dies der Fall, d. h. ist in der Normalgleichung (2a)

$$P_0(0) \neq 0,$$

so sagen wir, $x = 0$ ist für die Differentialgleichung *„eine Stelle der Bestimmtheit"*. In diesem Falle kann man die in

Rede stehenden Quotienten ihrerseits in Potenzreihen nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln und (indem man diese nun mit

$$P_1(x), \quad P_2(x), \dots P_n(x)$$

bezeichnet) $P_0(x) = 1$ annehmen. Alsdann erhält die Differentialgleichung die Form:

$$\text{(2b)} \quad x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} P_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + x P_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + P_n(x) \cdot y = 0,$$

welche für eine Stelle der Bestimmtheit charakteristisch ist.

806. Rekursionsformel. Ebenso wie der Koeffizient von x^α müssen auch alle folgenden verschwinden, so dafs wir eine unendliche Reihe von Gleichungen erhalten. Nun enthält der Koeffizient von $x^{\alpha+\lambda}$ keine der Gröfsen

$$c_{\lambda+1}, \quad c_{\lambda+2}, \dots,$$

da die entsprechenden Glieder der Reihe (3) immer höhere Potenzen von x liefern würden, und die ersten λ Koeffizienten von y treten linear auf. Hierbei ist c_λ selbst multipliziert mit

$$(\alpha+\lambda)\cdots(\alpha+\lambda-n+1)P_0(0) + \cdots + (\alpha+\lambda)P_{n-1}(0) + P_n(0) = F(\alpha+\lambda)$$

und verschwindet nur, wenn $\alpha + \lambda$ gleichfalls der determinierenden Gleichung

$$F = 0$$

genügt.

Ist also α eine solche Wurzel von (4), *aus der keine andere Wurzel derselben Gleichung durch Addition einer positiven ganzen Zahl abgeleitet werden kann, so kann man immer c_λ linear durch*

$$c_1, \quad c_2, \dots c_{\lambda-1}$$

ausdrücken.

Die Rekursionsformel hat also die Gestalt:

$$\text{(5)} \quad F(\alpha+\lambda) \cdot c_\lambda = b_{\lambda 0} + b_{\lambda 1} \cdot c_1 + b_{\lambda 2} c_2 + \cdots + b_{\lambda, \lambda-1} \cdot c_{\lambda-1}$$

und gestattet daher, die sämtlichen Koeffizienten c_λ successive zu bestimmen. Zu jeder solchen Wurzel α gehört also eine ganz bestimmte Reihe y von der Form (3), die wenigstens formal die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt. Dies gilt selbst dann noch, wenn $x = 0$ keine Stelle der Bestimmtheit ist.

807. Vorbereitungen zum Konvergenzbeweis. Um aber die Konvergenz der Reihe (3) zu zeigen, beschränken wir uns auf den Fall, wo die singuläre Stelle $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, also

$$P_0(x) = 1$$

angenommen werden kann. Wir setzen voraus, daſs α eine Wurzel der determinierenden Gleichung (4) ist, welche von keiner anderen Wurzel um eine ganze positive Zahl überschritten wird. Setzen wir dann (vergl. Nr. 802)

$$y = x^\alpha \bar{y},$$

so geht die Differentialgleichung (2b) über in eine Differentialgleichung für $\bar{y}$ von derselben Form:

$$(\overline{2\text{b}})\quad x^n \frac{d^n \bar{y}}{dx^n} + x^{n-1}\bar{P}_1(x)\frac{d^{n-1}\bar{y}}{dx^{n-1}} + \cdots + x\bar{P}_{n-1}(x)\frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{P}_n(x)\bar{y} = 0,$$

wobei sich die neuen Koeffizienten

$$\bar{P}_1(x),\ \bar{P}_2(x), \ldots \bar{P}_n(x)$$

als lineare Funktion der alten ergeben. Dieser neuen Differentialgleichung wird also gleichfalls formal genügt, wenn man für $\bar{y}$ die in (3) als Faktor auftretende Reihe einsetzt:

$$(\bar{3})\qquad \bar{y} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

deren Koeffizienten nach der Rekursionsformel (5) berechnet werden. Zu derselben Reihe hätten wir auch unmittelbar gelangen können, wenn wir die entwickelte Methode der Koeffizientenvergleichung direkt auf die Differentialgleichung $(\overline{2\text{b}})$ angewendet hätten. Unsere Reihe $(\bar{3})$ „gehört“ also — so sagt man — „zu dem Exponenten $\alpha = 0$“, der eine Wurzel der neuen determinierenden Gleichung

$$\bar{F}(\alpha) = 0$$

sein muſs, während keine positive ganze Zahl derselben Gleichung genügt. Die entsprechende Rekursionsformel muſs dieselbe sein wie die frühere. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit unserem Konvergenzbeweise den Fall $\alpha = 0$ zu Grunde legen, wodurch eine gewisse formale Vereinfachung erzielt wird.

Wir verfahren jetzt analog wie in Nr. 797 und vergleichen die Reihe (3) mit einer anderen Reihe mit größeren Koeffizienten, die aus einer analogen, aber einfacheren Differentialgleichung hervorgeht. Zu diesem Zwecke beachten wir, daſs wegen $\alpha = 0$ und Gleichung (4) auch

$$P_n(0) = 0$$

sein muſs, und schreiben die Differentialgleichung (2b) in der Form:

$$(2\text{c})\qquad x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} \cdot P_1(0) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + x \cdot P_{n-1}(0) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= x^n Q_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + x Q_n(x) \cdot y,$$

wo die Funktionen:

$$Q_k(x) = \frac{P_k(0) - P_k(x)}{x}$$

in der Umgebung von $x = 0$ wieder regulär sind.

Setzen wir in (2c) für y die Reihe (3) ein und vergleichen die Koeffizienten von x^λ auf beiden Seiten, so erhalten wir links:

$$\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) c_\lambda + \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 2) c_\lambda \cdot P_1(0) + \cdots$$
$$+ \lambda c_\lambda P_{n-1}(0) = F(\lambda) c_\lambda,$$

rechts aber lediglich Produkte der Gröſsen

$$c_1,\ c_2, \ldots c_{\lambda-1}$$

mit den Koeffizienten von

$$Q_1(x),\ Q_2(x), \ldots Q_n(x)$$

und lauter positiven Zahlenkoeffizienten, und unsere Rekursionsformel hat wieder die Gestalt:

$$(5)\qquad F(\lambda) \cdot c_\lambda = b_{\lambda 0} + b_{\lambda 1} \cdot c_1 + b_{\lambda 2} \cdot c_2 + \cdots + b_{\lambda, \lambda-1} c_{\lambda-1}.$$

808. Hilfsdifferentialgleichung. Man wird nun die Koeffizienten c_λ vergröſsern und die Konvergenz der Reihe (3) verschlechtern, wenn man die Funktionen $Q_k(x)$ durch solche mit absolut gröſseren, positiven Koeffizienten ersetzt. Wie in den früheren Konvergenzbeweisen wählen wir dazu die Funktion:

$$\psi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}} = M\left(1 + \frac{x}{r} + \frac{x^2}{r^2} + \cdots\right).$$

Dabei bedeutet r den Radius des Kreises, innerhalb dessen alle $Q_k(x)$ regulär und absolut nicht größer als M sind.

Gleichzeitig wollen wir die sämtlichen Größen $P_k(0)$ der linken Seite von (2c) durch eine positive Zahl p ersetzen, über die wir uns die Verfügung noch vorbehalten. Unsere Hilfsdifferentialgleichung, deren abhängige Variabele wir η nennen, wird dann:

$$(6)\quad p\left[x^n\cdot\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{n-1}\cdot\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+x\cdot\frac{d\eta}{dx}\right]=\psi(x)\cdot\left[x^n\cdot\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+x\cdot\eta\right].$$

Wir bestimmen nach der oben (Nr. 806) angegebenen Methode eine Potenzreihe für η:

$$(7)\qquad \eta=1+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\gamma_3x^3+\cdots,$$

welche (6) wenigstens formal befriedigt. An Stelle von $F(\lambda)$ tritt die determinierende Funktion:

$$(8)\ pf(\lambda)=p[\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+\lambda(\lambda-1)+\lambda],$$

welche für $\lambda=0$ ebenso wie $F(\lambda)$ verschwindet, für alle ganzen positiven λ aber positive Werte annimmt. Der Rekursionsformel (5) für die c_λ entspricht eine solche für die γ:

$$(9)\qquad pf(\lambda)\gamma_\lambda=\beta_{\lambda 0}+\beta_{\lambda 1}\gamma_1+\cdots+\beta_{\lambda,\lambda-1}\gamma_{\lambda-1}.$$

In ihr sind alle Koeffizienten $\beta_{\lambda\mu}$ positiv und größer als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$ in (5). Denn nach dem Schlusse der Nr. 807 waren die $b_{\lambda\mu}$ lineare homogene Funktionen der Werte der Q und ihrer Ableitungen an der Stelle $x=0$ mit positiven Zahlenkoeffizienten, die $\beta_{\lambda\mu}$ sind dieselben Funktionen der Werte von ψ und seinen Ableitungen an der Stelle $x=0$. Nach dem Satze der Nr. 643 ist also:

$$|b_{\lambda\mu}|<\beta_{\lambda\mu}.$$

809. Beendigung des Konvergenzbeweises. Wir behaupten nun: Durch passende Wahl der Zahl p kann der Faktor $pf(\lambda)$ von γ_λ für jedes ganze positive λ kleiner gemacht werden als $|F(\lambda)|$. Denn sowohl $F(\lambda)$ als $f(\lambda)$ sind ganze Funktionen n^{ten} Grades von λ, in denen der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist. Also ist:

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{f(\lambda)}{F(\lambda)}=\lim_{\lambda=\infty}\left[\frac{f(\lambda)}{\lambda^n}:\frac{F(\lambda)}{\lambda^n}\right]=1,$$

und von einem bestimmten $\lambda = t$ an wird daher:

$$\left|\frac{f(\lambda)}{F(\lambda)}\right| < 2, \quad (\lambda = t,\ t+1, \ldots).$$

Nimmt man also

$$p \leqq \frac{1}{2},$$

so wird:

$$pf(\lambda) < 2p\,|F(\lambda)| \leqq |F(\lambda)|.$$

Dieselbe Ungleichung gilt aber auch für

$$\lambda = 1,\ 2, \ldots t-1,$$

wenn man gleichzeitig p kleiner wählt als den kleinsten der Beträge von:

$$\frac{F(1)}{f(1)},\ \frac{F(2)}{f(2)}, \ldots \frac{F(t-1)}{f(t-1)}.$$

Diese sind alle von null verschieden; denn $F(\alpha)$ verschwindet für $\alpha = 0$, aber nach unserer Annahme für keinen anderen Wert, der diesen um eine ganze positive Zahl übersteigt. Demnach wird nach (5) und (9) für jedes ganze positive λ:

$$|c_\lambda| \leqq \frac{|b_{\lambda 0}| + |b_{\lambda 1} c_1| + \cdots + |b_{\lambda, \lambda-1} c_{\lambda-1}|}{|F(\lambda)|}$$

$$\leqq \frac{\beta_{\lambda 0} + \beta_{\lambda 1}|c_1| + \cdots + \beta_{\lambda, \lambda-1} \cdot |c_{\lambda-1}|}{pf(\lambda)} < \gamma_\lambda,$$

vorausgesetzt, dafs bereits

$$|c_1| < \gamma_1, |c_2| < \gamma_2, \ldots |c_{\lambda-1}| < \gamma_{\lambda-1}$$

bewiesen ist. Nun sieht man aber unmittelbar, dafs $|c_1| < \gamma_1$, wir schliefsen also für $\lambda = 2$, $|c_2| < \gamma_2$ und hieraus für $\lambda = 3$, $|c_3| < \gamma_3$, u. s. w. Es ist also:

$$|c_\lambda| < \gamma_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots \infty).$$

Somit konvergiert unsere Reihe (3) und stellt eine Lösung der Differentialgleichung (2b) oder (2c) dar, falls die Reihe (7) konvergiert. Um dies zu prüfen, multiplizieren wir in der Gleichung (6) auf beiden Seiten mit

$$1 - \frac{x}{r},$$

substituieren dann die Reihe (7) und vergleichen die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von x. So erhalten wir die neue Rekursionsformel

$$pf(\lambda)\gamma_\lambda = \frac{p}{r}[(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n)+(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+\lambda-1]\gamma_{\lambda-1}$$
$$+ M[(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+1]\gamma_{\lambda-1}$$

oder:

$$pf(\lambda)\gamma_\lambda = \left[\frac{p}{r}f(\lambda-1)+Mf_1(\lambda)\right]\gamma_{\lambda-1}, \tag{10}$$

wo $f_1(\lambda)$ eine ganze Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades von λ ist, während $f(\lambda)$ den Grad n hat. Also wird

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{\gamma_\lambda}{\gamma_{\lambda-1}} = \frac{1}{r},$$

und die Reihe (5) konvergiert für alle $|x|<r$, mithin auch die Reihe (3) innerhalb des Kreises r um den singulären Punkt $x=0$.

Hiermit ist bewiesen:

Satz II. *Ist der Grad der determinierenden Gleichung gleich der Ordnung n der Differentialgleichung, also der betrachtete Pol $x=x_0$ eine Stelle der Bestimmtheit, und ist α eine Wurzel der determinierenden Gleichung, aus der durch Addition einer positiven ganzen Zahl keine neue Wurzel abgeleitet werden kann, so existiert immer eine Lösung, die nach Division mit $(x-x_0)^\alpha$ in dem Gebiete von $x=x_0$ regulär ist.*

Und es folgt daraus:

Satz III. *Sind keine zwei Wurzeln der determinierenden Gleichung um eine ganze Zahl verschieden, so entspricht ihren n Wurzeln ein Fundamentalsystem von Lösungen, die sich um $x=x_0$ in der in Satz II angegebenen Weise verhalten.*

810. Beispiel. Als Beispiel für die vorstehenden Entwickelungen behandeln wir wieder die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2n}{x}\frac{dy}{dx}-m^2y=0 \tag{1}$$

in der Umgebung der singulären Stelle $x=0$. Wir machen entsprechend der Formel (3) der Nr. 805 den Ansatz:

$$y = x^\alpha + c_1x^{\alpha+1} + c_2x^{\alpha+2} + \cdots$$

und finden für α die „determinierende Gleichung" (Formel (4) der Nr. 805):

$$F(\alpha) \equiv \alpha(\alpha + 2n - 1) = 0.$$

Ihr Grad ist gleich 2, also ist $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit. Ist also $2n - 1$ keine ganze Zahl, so existiert (Nr. 808, Satz III) ein Fundamentalsystem von Lösungen y_1, y_2, von denen die eine zum Exponenten $\alpha = 0$, die andere zum Exponenten $1 - 2n$ gehört. Das Gebiet des Punktes $x = 0$ ist hier (Nr. 796) die ganze komplexe Ebene. Denn aufser $x = 0$ liegt kein singulärer Punkt im Endlichen. Also wird die eine Lösung y_1 durch eine beständig konvergente Potenzreihe gegeben, die andere y_2 durch das Produkt einer solchen mit x^{1-2n}. Erstere verhält sich also regulär um $x = 0$, die letztere nicht.

Die Rekursionsformel für die c_λ ist:

$$F(\alpha + \lambda) \cdot c_\lambda - m^2 \cdot c_{\lambda-2} = 0,$$

wobei $c_0 = 1$, $c_{-1} = 0$ zu setzen ist.

In Übereinstimmung mit Nr. 806 ist also der Koeffizient von c_λ gleich $F(\alpha + \lambda)$.

Für die erste Wurzel $\alpha = 0$ wird

$$F(\alpha + \lambda) = \lambda(\lambda + 2n - 1),$$

also wird für y_1:

$$c_\lambda = \frac{m^2 \cdot c_{\lambda-2}}{\lambda \cdot (\lambda + 2n - 1)}.$$

Es folgt also, da $c_0 = 1$ ist:

$$c_2 = \frac{m^2}{2(2n+1)},$$

$$c_4 = \frac{m^2 c_2}{4(2n+3)} = \frac{m^4}{2 \cdot 4(2n+1)(2n+3)},$$

$$c_6 = \frac{m^2 c_4}{6(2n+5)} = \frac{m^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

. . . .

Andererseits folgt wegen $c_{-1} = 0$:

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0.$$

Mithin wird:

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4 x^4}{2\cdot 4\cdot (2n+1)(2n+3)} + \cdots$$

Für die zweite Wurzel findet man durch ganz analoge Rechnung:

$$y_2 = x^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2\cdot 4(3-2n)(5-2n)} + \cdots\right],$$

und die vollständige Lösung wird

$$y = Cy_1 + C'y_2$$

in Übereinstimmung mit Nr. 802, Formel (3).

§ 3. Weitere Beispiele.

811. Erstes Beispiel. Die Existenz des für unser Beispiel soeben aufgestellten Fundamentalsystemes wird durch die allgemeinen Sätze der Nr. 809 nur in dem Falle bewiesen, dafs $2n - 1$ keine ganze Zahl ist. Es ist aber evident, dafs sie auch dann behauptet werden kann, wenn $2n$ zwar ganz, aber gerade ist. Denn dann sind nach dem Schlusse in Nr. 800 die Reihen für y_1 und y_2 beständig konvergent und ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, dafs $2n$ eine ganze, ungerade Zahl ist. Alsdann folgt immer noch aus Satz II (Nr. 809), dafs jedenfalls eine der beiden für y_1 und y_2 soeben aufgestellten Ausdrücke der Differentialgleichung genügt und zwar derjenige, welcher zu dem gröfseren Exponenten gehört. Es ist also dann y_1 eine Lösung, wenn $1-2n$ negativ oder null, also $2n$ eine positive ungerade Zahl ist. Dagegen ist y_2 eine Lösung, wenn $1-2n$ positiv, also $2n$ eine negative ungerade Zahl ist. Nach Nr. 802 geht aber die Differentialgleichung (1) durch die Substitution $y = x^{1-2n}\cdot z$ in eine solche für z über, bei der n mit $1-n$ vertauscht ist, und dies ist auch aus den soeben für y_1 und y_2 aufgestellten Ausdrücken abzulesen. Daher kann man sich auf den Fall beschränken, dafs n eine positive ungerade Zahl, also y_1 die von Satz II gelieferte Lösung ist. Die Reihe für y_1 ist nach diesem Satze immer noch beständig konvergent. Dagegen wird die für y_2 illusorisch.

Um also zu y_1 ein zweites Integral zu finden, mufs man einen anderen Weg einschlagen. Wir bedienen uns dabei einer Methode, die allgemein bei Differentialgleichungen 2ter Ordnung verwandt wird.

Vorerst führen wir allerdings noch eine bequemere Bezeichnung ein, indem wir setzen:

$$2n = 2r + 1,$$

so dafs r null oder positiv ist. Die vorgelegte Gleichung wird dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2r+1}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0,$$

und es ist:

$$y_1 = 1 + \frac{m^2x^2}{2(2r+2)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(2r+2)(2r+4)} + \cdots$$

Wenn man diesen Wert von y_1 anwendet, so wird das allgemeine Integral dargestellt durch

$$y = Cy_1 + C'y_1\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{y_1{}^2x^{2r+1}},$$

wobei C und C' zwei willkürliche Konstanten und x_0 irgend ein Anfangswert von x ist (Nr. 774). Da y_1 für $x = 0$ nicht verschwindet, ist aber $\frac{1}{y_1{}^2}$ nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbar. Man kann also setzen:

$$\frac{1}{y_1{}^2x^{2r+1}} = \frac{a_0}{x^{2r+1}} + \frac{a_1}{x^{2r}} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{x} + \frac{Y}{y_1{}^2},$$

wobei Y um $x = 0$ regulär ist. Folglich hat man:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{y_1{}^2x^{2r+1}} = \frac{P}{x^{2r}} + Glx + V;$$

P bezeichnet ein Polynom vom Grade $2r$, G eine Konstante und V eine analytische Funktion, welche um $x = 0$ regulär bleibt. Hieraus folgt, dafs die vorgelegte Gleichung eine Lösung von der Form:

$$y = y_1\left(\frac{P}{x^{2r}} + Glx\right) + z$$

haben mufs, wobei z eine Funktion ist, die um $x = 0$ regulär ist. Demnach ist es angezeigt die Substitution anzuwenden, welche durch die vorstehende Formel ausgedrückt wird, und alsdann die Entwickelung von Mac-Laurin oder das Verfahren der unbestimmten Koeffizienten auf die transformierte Gleichung für z anzuwenden. Diese wird sich von der ursprünglichen nur durch ein zweites Glied unterscheiden, welches durch die Substitution eingeführt ist.

812. Ein besonderer Fall. Wir beschränken uns darauf, die Rechnung für den einfachsten Fall, wo $r = 0$ ist, auszuführen. Die gegebene Gleichung ist dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0,$$

und ein partikulares Integral derselben ist:

$$y_1 = 1 + \frac{m^2x^2}{2^2} + \frac{m^4x^4}{2^2.4^2} + \frac{m^6x^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots$$

oder:

$$y_1 = +\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{m^{2k}x^{2k}}{2^2.4^2\ldots(2k)^2}.$$

Das mit P bezeichnete Polynom reduziert sich hier auf eine Konstante, und das Produkt Py_1 kann mit z vereinigt werden; ferner ist evident, dafs es gestattet ist, $G = 1$ zu setzen, und folglich können wir

$$y = y_1 lx + z$$

annehmen; also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} lx + \frac{y_1}{x} + \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} lx + \frac{2}{x}\frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{x^2} + \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Trägt man diese Werte in die Differentialgleichung ein, so erhält man die transformierte:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - m^2z = -\frac{2}{x}\frac{dy_1}{dx}.$$

Wir setzen nun:

$$z = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_kx^{2k} + \cdots$$

und bezeichnen zur Abkürzung mit

$$A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_k x^{2k} + \cdots$$

den Wert von y_1. Substituiert man diese Werte von z und von y_1 in die Differentialgleichung und setzt die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich, so folgt:

$$4k^2 a_k - m^2 a_{k-1} = -4k A_k$$

und folglich:

$$\frac{a_k}{A_k} - \frac{a_{k-1}}{A_{k-1}} = -\frac{1}{k},$$

und folglich:

$$\frac{a_k}{A_k} - \frac{a_0}{A_0} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

Nichts hindert uns $a_0 = 0$ anzunehmen, und also wird:

$$a_k = -\frac{m^{2k}}{2^2 . 4^2 \ldots (2k)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

Also hat man als zweites partikulares Integral:

$$y_2 = y_1 lx - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{2^2 . 4^2 \ldots (2k)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

813. Ein neuer Spezialfall. Wir hatten schon Gelegenheit zu bemerken, daſs es auch von Nutzen sein kann, eine Änderung der Variabelen zu vollziehen, bevor man eine Reihenentwickelung ausführt. Wir wollen dafür ein Beispiel geben, indem wir einen neuen Fall der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0$$

betrachten. Wir setzen $\mu = \pm m$ und führen die Substitution aus:

$$y = z e^{\mu x}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) e^{\mu x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right) e^{\mu x}.$$

Da $\mu^2 = m^2$ ist, so erhalten wir die transformierte Gleichung für z:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx}\right) + \frac{2n}{x}\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Versuchen wir nun derselben durch eine Reihe

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

zu genügen, so folgt, indem wir die Koeffizienten irgend einer Potenz von x null setzen:

$$k(2n + k - 1) a_k + 2\mu(n + k - 1) a_{k-1} = 0.$$

Ist $2n$ nicht eine ganze negative Zahl, so bestimmt diese Gleichung das Verhältnis der Koeffizienten $a_k : a_{k-1}$, und daraus gewinnt man den Wert von a_k, nämlich:

$$a_k = (-2\mu)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k.(2n)(2n+1)\ldots(2n+k-1)} a_0;$$

der erste Koeffizient a_0 bleibt willkürlich.

Ist n eine ganze negative Zahl $-r$, so zeigt die erhaltene Relation zwischen a_k und a_{k-1}, dafs a_{r+1} null ist, und folglich gilt dasselbe auch für a_{r+2}, $a_{r+3}, \ldots$ Andererseits kann man aber auch die Koeffizienten a_0, $a_1, \ldots a_{2r}$ null setzen, a_{2r+1} willkürlich annehmen, und alsdann sind die folgenden Koeffizienten bestimmt als Funktionen von a_{2r+1}. Demnach erhält man in dem vorliegenden Fall die beiden folgenden Integrale der Gleichung für z:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r,$$

$$z = a_{2r+1} x^{2r+1} + a_{2r+2} x^{2r+2} + \cdots,$$

und mithin eine partikulare Lösung der ursprünglichen Gleichung durch einen Ausdruck, welcher nur eine endliche Anzahl von Gliedern besitzt. Wir bemerken dabei, dafs man zwei partikulare Integrale dieser Art hat, da man für μ den doppelten Wert $\pm m$ wählen kann.

Hieraus folgt, dafs sich die vollständige Lösung der gegebenen Gleichung in endlicher Form darstellen läfst, wenn n eine ganze negative Zahl ist. Dasselbe gilt auch, wenn n eine ganze positive Zahl ist, denn dieser Fall läfst sich, wie wir bereits sahen, auf den vorigen zurückführen.

Man erhält dann auch das Integral in einer bemerkenswerten Form, indem man folgendermafsen verfährt.

814. Schlufs des Beispieles. Wir setzen:

$$z = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}},$$

und die Differentialgleichung wird:

$$\left[x\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}} + n\frac{d^n u}{dx^n}\right] + \left[(2\mu x + n)\frac{d^n u}{dx^n} + 2n\mu\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right] = 0.$$

Der erste Teil dieses Ausdruckes ist die n^{te} Ableitung der Funktion $x\frac{du}{dx}$; desgleichen ist der zweite die n^{te} Ableitung von

$$(2\mu x + n)u.$$

Integriert man also die Gleichung n-mal, und bezeichnet man mit P_{n-1} ein willkürliches Polynom von x vom Grade $n-1$, so erhält man:

$$x\frac{du}{dx} + (2\mu x + n)u = P_{n-1}.$$

Da wir aber nur einen partikularen Wert von u brauchen, so können wir

$$P_{n-1} = 0$$

setzen; also wird die vorstehende Gleichung, wenn man die Variabelen trennt:

$$\frac{du}{u} + \left(2\mu + \frac{n}{x}\right)dx = 0,$$

und hieraus folgt:

$$lu + 2\mu x + nlx = \text{const.}$$

Setzt man die Konstante ebenfalls null, so wird:

$$u = e^{-2\mu x}x^{-n},$$

und demnach:

$$z = \frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}, \quad y = e^{\mu x}\frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Den Werten $+m$ und $-m$ von μ entsprechen zwei partikulare Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung; das vollständige Integral ist also im Falle eines positiven ganzzahligen n:

$$y = Ce^{mx}\frac{d^{n-1}(e^{-2mx}x^{-n})}{dx^{n-1}} + C'e^{-mx}\frac{d^{n-1}(e^{2mx}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Ist n eine ganze negative Zahl, so mufs man $1-n$ an Stelle von n schreiben und das erhaltene Resultat mit x^{1-2n} multiplizieren (Nr. 802). Es wird also in diesem Falle die vollständige Lösung:

$$y = Ce^{mx}x^{1-2n}\frac{d^{-n}(e^{-2mx}x^{n-1})}{dx^{-n}} + C'e^{-mx}x^{1-2n}\frac{d^{-n}(e^{2mx}x^{n-1})}{dx^{-n}}.$$

§ 4. Beziehungen zwischen Differentialgleichungen und bestimmten Integralen. Summation von Reihen durch Differentialgleichungen.

815. Darstellung von Lösungen durch bestimmte Integrale. Erstes Beispiel. Anstatt die Integrale durch Reihen darzustellen, ist es oftmals vorteilhaft, bestimmte Integrale anzuwenden. Die Aufgabe, welche hierbei zu lösen ist, besteht also darin, dafs man durch solch ein Integral die Summe einer bestimmten Reihe ausdrückt. Eine allgemeine Regel hierfür läfst sich nicht aufstellen; auch beschränken wir uns darauf, nur ein Beispiel zur Erläuterung anzugeben. Wir wählen wieder die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0; \tag{1}$$

sie besitzt, wie wir gesehen haben, ein Integral von der Form

$$y = A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + \cdots + A_kx^{2k} + \cdots, \tag{2}$$

wobei die Koeffizienten A der Bedingung genügen:

$$A_k = \frac{m^2}{2k(2n+2k-1)}A_{k-1}. \tag{3}$$

Setzt man

$$\varphi(k) = \frac{2k-1}{2n+2k-1}\varphi(k-1), \tag{4}$$

so wird die Bedingung (3):

$$\frac{A_k}{\varphi(k)} = \frac{m^2}{2k(2k-1)}\frac{A_{k-1}}{\varphi(k-1)},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{A_k}{\varphi(k)} = \frac{m^{2k}}{(2k)!}\frac{A_0}{\varphi(0)}.$$

Da A_0 willkürlich ist, so wählen wir $A_0 = \varphi(0)$, also wird:

$$A_k = \frac{m^{2k}}{(2k)!}\varphi(k).$$

Wenn nun n positiv ist, so wird der Gleichung (4) genügt, wenn man

$$\varphi(k) = \int_0^\pi \cos^{2k}\omega \sin^{2n-1}\omega\, d\omega$$

setzt, wie man aus der teilweisen Integration erkennt; man kann demnach

$$A_k = \frac{m^{2k}}{(2k)!}\int_0^\pi \cos^{2k}\omega \sin^{2n-1}\omega\, d\omega$$

setzen, und die Gleichung (2) ergiebt als Lösung:

$$y_1 = \int_0^\pi \left(1 + \frac{m^2x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{m^4x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} + \cdots\right)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega$$

oder

$$y_1 = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(e^{mx\cos\omega} + e^{-mx\cos\omega}\right)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega.$$

Um ein zweites Integral zu bekommen, kann man (Nr. 802) n in $1-n$ verwandeln, und sodann mit x^{1-2n} multiplizieren; also wird:

$$y_2 = x^{1-2n}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(e^{mx\cos\omega} + e^{-mx\cos\omega}\right)\sin^{1-2n}\omega\, d\omega.$$

Dies setzt aber voraus, dafs $n < 1$ ist, denn sonst wird dieses Integral unendlich.

816. Zweites Beispiel. Ist m^2 negativ, und setzen wir

$$m^2 = -\mu^2,$$

so ist das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0,$$

wenn n zwischen 0 und 1 enthalten ist, gleich:

$$y = C\int_0^\pi \cos(\mu x \cos\omega)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega + C' x^{1-2n}\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\sin^{1-2n}\omega\, d\omega.$$

Ist $n = \frac{1}{2}$, so werden die beiden partikularen Integrale in dieser Formel identisch; doch kann man leicht das allgemeine Integral, welches diesem Falle entspricht, erhalten, wenn man das Verfahren anwendet, dessen wir uns schon mehrmals bedient haben. Wir setzen $2n = 1 - h$, so wird:

$$\sin^{2n-1}\omega = 1 - h\log(\sin\omega) + \frac{h^2 \log^2(\sin\omega)}{1.2}(\sin\omega)^{\theta h},$$

$$(x\sin\omega)^{1-2n} = 1 + h\log(x\sin\omega) + \frac{h^2\log^2(x\sin\omega)}{1.2}(x\sin\omega)^{\theta' h};$$

θ und θ' sind Werte zwischen 0 und 1. Trägt man diese Größen in die obige Formel ein und ersetzt man dabei $C + C'$ durch C_1, $C'h$ durch C_2, läßt man endlich h null werden, so folgt:

$$y = C_1\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\,d\omega + C_2\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\log(x\sin\omega)\,d\omega,$$

und dies ist das vollständige Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0.$$

Dieses Resultat läßt sich auch leicht aus der Entwickelung in Nr. 812 ableiten.

817. Berechnung bestimmter Integrale durch Differentialgleichungen. Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, ist die Umkehr der vorigen. Enthält ein bestimmtes Integral einen variabelen Parameter, so kann man das Problem stellen, eine Differentialgleichung zu bilden, welcher dieses Integral genügt, und in welcher das Integral als die unbekannte Funktion eingeht. Läßt sich diese Gleichung nun auf anderem Wege integrieren, so kann man auf diese Weise den Wert des bestimmten Integrales berechnen. Wir wollen hierfür ein Beispiel geben.

Wir betrachten das bestimmte Integral:

$$(1) \qquad y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha,$$

wobei der Exponent $n+1$ als positiv vorausgesetzt ist. Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\sin \alpha x}{x(1+\alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x} \int \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{2(n+1)}{x} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha$$

oder

$$(2) \qquad xy = 2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha.$$

Differentiiert man diese Gleichung zweimal, so folgt:

$$(3) \qquad \frac{d^2(xy)}{dx^2} = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha^3 d\alpha.$$

Damit dieses Integral einen bestimmten endlichen Wert hat, mufs $2n+1$ positiv sein. Demnach wird:

$$(4) \qquad \frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha.$$

Die Differentiation der Gleichung (1) ergiebt aber auch

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha,$$

und also ist nach den Gleichungen (4) und (5):

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = 2(n+1) \frac{dy}{dx}$$

oder

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung, welche wir in den vorigen Abschnitten behandelt haben. Wir können sie in endlicher Form integrieren, wenn n eine ganze Zahl ist; in diesem Falle kann man also auch das bestimmte Integral in expliciter geschlossener Form angeben.

Ist z. B. $n = 0$, so reduziert sich die Differentialgleichung auf:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0,$$

und ihre vollständige Lösung ist:

$$y = Ce^{x} + C'e^{-x}.$$

Es müssen nur noch die Konstanten C und C' bestimmt werden. Zunächst erhält man, wenn x positiv ist, $C = 0$; denn das vorgelegte bestimmte Integral kann nicht mit x unbegrenzt wachsen. Ferner wird dieses Integral für $x = 0$ gleich

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\pi}{2},$$

also ist

$$C' = \frac{\pi}{2},$$

und folglich:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

für $x > 0$, wie wir bereits in Nr. 517 gefunden haben.

818. Summation einer unendlichen Reihe durch eine Differentialgleichung. Die Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder von einer Variabelen abhängen, läſst sich bisweilen dadurch bestimmen, daſs man eine Differentialgleichung bildet, welcher die Reihensumme genügt, und daſs man alsdann diese Gleichung in geschlossener Form zu integrieren sucht. Auf diese Weise kann man auch öfters zu einer Transformation der Reihe in eine andere gelangen, welche für die numerische Berechnung bequemer ist.

Als Beispiel behandeln wir die Aufgabe, die Summe der konvergenten Reihe:

$$(1)\quad \begin{cases} X = 1 - \frac{x^2}{1.3.5} + \frac{x^4}{1.3.5.7.9} - \cdots \\ \qquad + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.3.5\ldots(4n+1)} + \cdots \end{cases}$$

zu finden. Indem wir die Variabele x als reell und positiv annehmen, setzen wir

$$y = X\sqrt{x},$$

so wird

$$(2)\quad y = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{1.3.5\ldots(4n+1)}.$$

Differentiiert man diese Gleichung zweimal und multipliziert man das Resultat mit 4, so folgt:

$$(3)\quad 4\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-\frac{3}{2}} - \left[x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \cdots\right],$$

ferner, indem man die Gleichungen (2) und (3) addiert:

$$(4)\quad 4\frac{d^2y}{dx^2} + y = -x^{-\frac{3}{2}}.$$

Diese Gleichung ist eine lineare mit konstanten Koeffizienten, und ihr vollständiges Integral wird nach den früheren Regeln:

$$(5)\quad y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\left[C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\right] + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left[C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\right].$$

Hieraus folgt:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\left[C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\right] \\ \qquad + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\left[C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\right]. \end{cases}$$

Um die Konstanten C und C' zu bestimmen, nehmen wir $x=0$ an und vergleichen die Gleichungen (5) und (6) mit der Gleichung (2) und der folgenden, die aus der Differentiation der Gleichung (2) hervorgeht:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1.3}+\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{1.3.5.7}-\cdots \tag{7}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (2) und (7) verschwinden für $x=0$; folglich mufs das nämliche bei den Gleichungen (5) und (6) eintreten, also ist $C=0$ und $C'=0$. Setzt man also $X\sqrt{x}$ an Stelle von y, so hat man:

$$X\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx. \tag{8}$$

Da der Wert von x positiv angenommen ist, so ist (Nr. 500):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha$$

oder (Nr. 502):

$$x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha x}{2}}\alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha.$$

Führt man diesen Wert auf der rechten Seite der Gleichung (8) ein, und vertauscht man zugleich die Reihenfolge der Integrationen, so wird:

$$X\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cos\frac{x}{2}\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sin\frac{x}{2}\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

Nun ist nach Nr. 456:

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\alpha x}}{1+\alpha^2}\left(-\alpha\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{2\alpha}{1+\alpha^2},$$

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{x}{2}\,dx = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\alpha x}}{1+\alpha^2}\left(-\cos\frac{x}{2}-\alpha\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{1+\alpha^2};$$

also wird

$$X\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{x}{2}\int_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{x}{2}\int_0^\infty \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}d\alpha}{1+\alpha^2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\alpha^{\frac{1}{2}}d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Die beiden Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}d\alpha}{1+\alpha^2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}d\alpha}{1+\alpha^2}$$

reduzieren sich auf (Nr. 478):

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{4}-1}dz}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

indem man $\alpha = z^{-\frac{1}{2}}$ in dem ersten und $\alpha = z^{\frac{1}{2}}$ in dem zweiten setzt; also ist:

$$(9)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\alpha^{\frac{1}{2}}d\alpha}{1+\alpha^2}$$

oder

$$(10)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) - V,$$

indem man

(11) $$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2}$$

einführt. Das Produkt $V\sqrt{2\pi x}$ wird für $x = +\infty$ null; ist also der Wert von x sehr grofs, so hat man nahezu:

(12) $$X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right).$$

Es ist evident, dafs für solche Werte von x die Anwendung der Gleichung (1) unpraktisch wäre. Wir können aber noch weiter gehen, indem wir V in eine Reihe entwickeln, welche für die Berechnung von X bei grofsen Werten von x sehr bequem ist. Es ist:

$$\frac{1}{1+\alpha^2} = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha^{2n-2} + (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^2}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{5}{2}} d\alpha + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{4n-3}{2}} d\alpha + (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{4n+1}{2}}}{1+\alpha^2} d\alpha \right].$$

Das letzte Integral kann durch

$$\theta \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{4n+1}{2}} d\alpha$$

dargestellt werden, wenn θ eine Gröfse zwischen 0 und 1 bezeichnet; ferner ist (Nr. 500):

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{4i+1}{2}} d\alpha = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{4i+3}{2}} \Gamma\left(\frac{4i+3}{2}\right) = \sqrt{2\pi x}\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4i+1)}{x^{2i+2}},$$

also:

$$(13)\quad \begin{cases} V = \frac{1}{x^2} - \frac{1.3.5}{x^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.3.5\ldots 4n-3}{x^{2n}} \\ \qquad + \theta(-1)^n \frac{1.3.5\ldots(4n+1)}{x^{2n+2}}. \end{cases}$$

Läſst man n unbegrenzt wachsen, so erhält man eine divergente Reihe; da aber der Fehler, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei einem Gliede abbricht, kleiner ist als der Wert des nächstfolgenden Gliedes, so ist die Reihe doch sehr dienlich zur Berechnung von V bei groſsen Werten von x. Sie ist, wie man sieht, der Stirlingschen Reihe darin ähnlich. Ist z. B. $x > 10000$, so kann man den Wert von X mit sieben genauen Dezimalstellen vermittelst der angenäherten Formel (12) berechnen.

Man kann leicht beweisen, daſs die Gleichung $X = 0$ eine unendliche Anzahl reeller Wurzeln besitzt, und daſs die positiven Wurzeln, geordnet nach ihrer Gröſse, sich immer weniger von den entsprechenden Wurzeln der Gleichung

$$\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0$$

unterscheiden, welche in der Formel

$$x = (4i+3)\frac{\pi}{2}$$

enthalten sind. Doch überlassen wir es dem Leser, diese weiteren Folgerungen zu entwickeln.

Zweiter Teil.

Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung.



Siebentes Kapitel.

Die partiellen und die totalen Differentialgleichungen erster Ordnung.

---

§ 1. Einfache Fälle. Lineare partielle Differentialgleichungen.

819. Grundbegriffe. Ein einfaches Beispiel. Eine partielle Differentialgleichung enthält zwei oder mehrere unabhängige Variabele, eine oder mehrere unbekannte Funktionen dieser Variabelen, sowie einige der partiellen Ableitungen dieser Funktionen. Bei den Aufgaben, welche auf solche Gleichungen führen, ist die Zahl der Gleichungen gewöhnlich gleich der Anzahl der unbekannten Funktionen. Die folgenden Entwickelungen beschränken sich auf den Fall einer einzigen Gleichung, welche nur *eine* unbekannte Funktion enthält.

Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung wird als gelöst betrachtet, wenn es gelungen ist, dasselbe auf die Integration eines Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückzuführen.

Die Reduktion ist von selbst gegeben, wenn die partiellen Ableitungen, welche in der Gleichung vorkommen, sich nur auf eine einzige der Variabelen beziehen. Denn in diesem Falle kann man, wie leicht ersichtlich, so vorgehen, wie wenn eine jede der anderen Variabelen ein konstanter Parameter wäre; doch hat man die Konstanten, welche durch die Integrationen eingeführt werden, als willkürliche Funktionen dieser Variabelen zu betrachten.

Nehmen wir z. B. die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z f(x, y) = F(x, y),$$

in welcher z eine unbekannte Funktion der Variabelen x und y ist, und f, F gegebene Funktionen derselben bezeichnen. Wird die Variabele y als Konstante behandelt, so ergiebt die Integration (Nr. 675):

$$z = e^{-\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\left[C + \int_{x_0}^{x} F(x,y)\, e^{\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\, dx\right].$$

Aber die Konstante C ist hier eine willkürliche Funktion von y; schreibt man also $\varphi(y)$ an Stelle von C, so wird:

$$z = e^{-\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\left[\varphi(y) + \int_{x_0}^{x} F(x,y)\, e^{\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\, dx\right].$$

820. Zweites Beispiel. In derselben Weise kann man auch bei gewissen Differentialgleichungen vorgehen, welche die Ableitungen nach mehreren unabhängigen Variabelen enthalten. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y);$$

a ist eine gegebene Konstante und $f(x,y)$ eine gegebene analytische Funktion der Variabelen x, y. Setzt man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

so wird:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + ap = f(x,y),$$

und in dieser Form gehört sie zu der Klasse der Gleichungen, von welchen wir oben handelten. Integriert man dieselbe, wie wenn x eine Konstante wäre, und bezeichnet man mit X' die willkürliche Konstante, so erhält man:

$$p = X'e^{-ay} + e^{-ay}\int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x,y)\,dy.$$

In dieser Gleichung mufs man X' als eine willkürliche Funktion von x betrachten. Setzt man nun wieder $\frac{\partial z}{\partial x}$ an Stelle von p, so ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'e^{-ay} + e^{-ay}\int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x,y)\,dy.$$

Indem man nun diese Gleichung integriert und dabei mit Y die willkürliche Konstante, d. h. eine willkürliche Funktion von y, und mit X die willkürliche Funktion von x bezeichnet, deren Ableitung X' ist, so wird:

$$Z = Y + Xe^{-ay} + e^{-ay}\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x,y)\,dy.$$

Es ist evident, daſs diese Formel die allgemeinste Lösung der vorgelegten Differentialgleichung liefert; d. h. alle Funktionen z, welche nebst ihren partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

analytisch sind und der Differentialgleichung genügen. Sie enthält zwei willkürliche Funktionen X, Y, die erste ist unabhängig von y, die zweite unabhängig von x.

821. Die linearen Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabelen. Wir werden später die Definition des *allgemeinen Integrales* einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung geben und nachweisen, daſs die Bestimmung desselben immer auf die Integration eines Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführbar ist, wie groſs auch die Zahl der unabhängigen Variabelen sein mag. Hier werden wir uns mit dem besonderen Fall derjenigen partiellen Gleichungen erster Ordnung beschäftigen, in denen die Ableitungen nur im ersten Grade und nicht miteinander multipliziert vorkommen.

Es seien x, y, z drei Variabele, von denen die letzte als Funktion der beiden anderen betrachtet wird; wir setzen:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

womit ausgedrückt ist, daſs p und q die partiellen Ableitungen von z in Bezug auf x und auf y darstellen.

Die partielle Differentialgleichung, welche wir untersuchen, ist:

$$(1) \qquad Pp + Qq = R;$$

P, Q, R bezeichnen hier gegebene Funktionen der drei Variabelen x, y, z, die man sich der Einfachheit halber ganz und rational denken kann.

Wir haben früher gesehen (Nr. 88), daſs, wenn u und v gegebene Funktionen von x, y, z sind, eine partielle Differentialgleichung von derselben Form wie oben erhalten wird, wenn man die willkürliche Funktion φ der Gleichung

$$v = \varphi(u) \tag{2}$$

aus den Gleichungen eliminiert, welche man durch Differentiation nach x und nach y hieraus ableitet. Infolgedessen untersuchen wir nun umgekehrt, ob man in allen Fällen der Gleichung (1) genügen kann, indem man für z eine Funktion wählt, wie sie durch die Gleichung (2) definiert ist, wodurch φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, u und v aber bestimmte Funktionen von x, y, z, deren Form von den Koeffizienten P, Q, R abhängig ist.

Differentiiert man die Gleichung (2) nach x und nach y, so folgt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} &= \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} &= \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Damit also die Gleichung (2) eine Lösung der Gleichung (1) ergiebt, so ist notwendig und hinreichend, daſs man eine identische Gleichung bekommt, wenn man p und q aus den Gleichungen (1) und (3) eliminiert. Um diese Elimination auszuführen, braucht man die Gleichungen (3) nur zu addieren, nachdem man sie mit P und Q multipliziert hat; dann folgt, indem man die Gleichung (1) benutzt:

$$\left(P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \varphi'(u)\left(P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Diese Gleichung besteht, unabhängig von der Funktion φ, identisch, wenn bei allen Werten von x, y, z die Gleichungen gelten:

$$\left\{\begin{aligned} P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Nun haben wir in Nr. 727 bewiesen, daſs die beiden Integrale des simultanen Systemes:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \tag{5}$$

wenn man dieselben mit

$$u = \text{const.} \quad v = \text{const.} \tag{6}$$

bezeichnet, den Gleichungen (4) identisch genügen. Wählt man also für u und v in der Gleichung (2) die Funktionen, welche als Integrale des Systemes (5) bestimmt sind, so liefert diese Gleichung eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wie auch immer die Funktion φ angenommen wird.

822. Das allgemeine Integral der linearen Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Wir wollen nun noch beweisen, daſs jede Lösung der Gleichung (1) in der Gleichung (2) enthalten ist. Nehmen wir an, daſs die Gleichung (1) erfüllt ist durch eine Funktion z, die durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

definiert ist, so folgt aus dieser durch Differentiation:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

und indem man diese Werte von p und q in die Differentialgleichung (1) einsetzt, muſs unserer Annahme nach

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

werden, bei allen Werten von x und y, wenn man für z seinen Wert aus der Gleichung (7) substituiert.

Die Gröſsen, welche wir mit u und v bezeichnet haben, sind aber gegebene Funktionen von x, y, z. Also kann man y, z als Funktionen von u, v, x, oder x, z als Funktionen von u, v, y betrachten. Es sei demnach:

$$F(x, y, z) = f(u, v, x) = f_1(u, v, y); \tag{9}$$

dann ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z},$$

und die Substitution dieser Werte in die Gleichung (8) ergiebt auf Grund der Gleichung (4):

$$P\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Desgleichen folgt aus der Formel (9):

$$Q\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Reduziert sich die linke Seite der Gleichung (7) nicht auf eine Funktion der Variabelen u und v allein, so werden die Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

nicht identisch null; man kann dann aber auch nicht annehmen, daſs eine der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

auf Grund der Gleichung (7)

$$f(u, v, x) = 0$$

oder

$$f_1(u, v, y) = 0$$

besteht; denn die Elimination von x oder von y würde eine Endgleichung zwischen u und v ergeben, was zufolge der Unabhängigkeit der Funktionen u und v (Nr. 727) nicht möglich ist. Also müſsten P und Q null werden vermittelst der Gleichung (7), und dies erfordert, daſs auch R gleich null wird. Es ist also evident, daſs, wenn P, Q, R gleichzeitig für eine Funktion z der Variabelen x und y verschwinden, diese Funktion der Differentialgleichung genügt. Indem wir aber von diesen singulären Lösungen, die nur in besonderen

Fällen auftreten, absehen, erkennen wir, daſs die Gleichung (7) notwendig von der Form

$$\Phi(u, v) = 0$$

ist, woraus man für v einen Wert

$$v = \varphi(u)$$

ableiten kann, der nur von u allein abhängt.

823. Geometrische Deutung. Das Problem, welches wir hier durch Zurückführung auf die Integration eines simultanen Systemes von zwei Gleichungen gelöst haben, läſst sich geometrisch folgendermaſsen interpretieren. Wie die Koordinaten x, y, z geometrisch einen Punkt im Raume darstellen, so wird durch die Gröſsen p, q, welche zu solch einem Wertsystem gehören, eine Ebene in dem betreffenden Punkt festgelegt, indem man derselben die Gleichung giebt:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

wobei ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bedeuten. Nennen wir einen Punkt, mit einer durch ihn gelegten Ebene ein *Flächenelement* oder kurz *Element*, so giebt es ∞^5 Elemente, entsprechend den fünf Gröſsen x, y, z, p, q. Eine partielle Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

welche eine Relation zwischen diesen fünf Gröſsen darstellt, umfaſst ∞^4 Elemente, indem zu jedem Punkte des Raumes nur noch einfach unendlich viele Ebenen gehören. Ein Integral der Differentialgleichung ist jede Fläche

$$z = F(x, y),$$

welche die Eigenschaft hat, daſs jeder Flächenpunkt mit seiner Tangentenebene ein Element bildet, welches der Differentialgleichung angehört.

Ist nun insbesondere die Differentialgleichung eine lineare, also von der Form:

$$Pp + Qq = R,$$

und sind P, Q, R eindeutige (etwa ganze) Funktionen, so bilden die Ebenen, welche jedem Punkte des Raumes zu-

geordnet werden, ein lineares Ebenenbüschel. Denn haben x, y, z bestimmte Werte, so ist für jede diesem Punkte zugeordnete Ebene

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die eine Koordinate q darstellbar durch

$$\frac{R - Pp}{Q},$$

so dafs die Gleichung der Ebene wird:

$$Q(\zeta - z) = Qp(\xi - x) + (R - Pp)(\eta - y);$$

dieselbe enthält in ihren Koeffizienten nur eine Variabele, welche in der ersten Potenz auftritt, und alle die Ebenen, die sich bei willkürlichen Werten von p ergeben, schneiden sich demnach längs der Geraden, deren Gleichungen sind:

$$Q(\zeta - z) = R(\eta - y), \quad Q(\xi - x) = P(\eta - y).$$

Durch eine lineare partielle Differentialgleichung wird demnach jedem Punkte eine Richtung zugeordnet, welche man durch das simultane System

$$Qdz = Rdy, \quad Qdx = Pdy$$

oder

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

darstellen kann, wodurch ausgedrückt ist, dafs der zum Punkt x, y, z benachbarte Punkt

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz$$

auf der vorgeschriebenen Richtung liegt.

Soll nun eine Fläche die Eigenschaft haben, dafs ihre Punkte und Tangentenebenen Elemente bilden, welche den Differentialgleichungen genügen, d. h. soll sie ein Integral dieser Gleichung sein, so mufs durch jeden Punkt der Fläche auch die zugeordnete Richtung hindurchgehen und in der Tangentenebene liegen. Die Richtungen, welche durch das simultane System dargestellt werden, bestimmen aber ein System von ∞^2 Kurven im Raum oder — wie wir in Nr. 729 sagten — eine *Kongruenz*; dasselbe wird durch das vollständige Integral des simultanen Systemes geliefert, welches wir durch

$$u = C, \quad v = C'$$

bezeichneten. Jede dieser Gleichungen liefert ein einfach unendliches Flächensystem, und jede Fläche des einen Systemes wird von jeder Fläche des anderen längs einer dieser Kurven geschnitten.

Weil nun jede Integralfläche in jedem ihrer Punkte zugleich die vorgeschriebene Fortschreitungsrichtung enthält, so enthält sie auch die ganze Kurve, welche von dieser Fortschreitungsrichtung bestimmt ist; das heifst, auf jeder Integralfläche liegen einfach unendlich viele Kurven; und umgekehrt jede Fläche, welche einfach unendlich viele Kurven enthält, ist eine Integralfläche. Einfach unendlich viele Kurven des Systemes

$$u = C, \quad v = C'$$

erhält man, indem man zwischen den Konstanten C und C' eine willkürliche Relation annimmt, d. h. jede Integralfläche läfst sich in der Form

$$v = \varphi(u)$$

darstellen, und alle Flächen dieser Form sind Integrale.

Die Tangentenebenen, welche die verschiedenen Integralflächen in den Punkten einer auf ihnen gelegenen Kurve

$$u = C, \quad v = C'$$

besitzen, können voneinander verschieden sein, da ja in jedem Punkte der Raumkurve noch einfach unendlich viele Ebenen, welche durch die Tangente hindurchgehen, vorhanden sind, mit anderen Worten: zwei Integralflächen können sich längs einer der Raumkurven schneiden, wie ja auch umgekehrt jeder Schnitt zweier Integralflächen eine Kurve des Systemes sein mufs. Dagegen ist das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebenen längs einer Raumkurve auf einer Fläche ändern, vollkommen festgelegt, wenn man in einem Punkte der Raumkurve die Tangentenebene kennt, so dafs, wenn zwei Integralflächen in einem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangentenebene haben, sie sich auch in allen Punkten der Kurve berühren. Denn ist

$$\varphi(u, v) = 0$$

die Gleichung einer Integralfläche, auf welcher die Kurve

$$u = C_1, \quad v = C_2$$

liegt, wobei unter C_1 und C_2 zwei bestimmte Größsen verstanden sind, welche der Relation

$$\varphi(C_1, C_2) = 0$$

genügen, so ist die Tangentenebene der Fläche in den Punkten dieser Kurve durch die partiellen Ableitungen bestimmt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z};$$

dieselben bestimmen eine Ebene, welche in jedem Punkte der Kurve durch die Tangente derselben hindurchgeht, denn für dieselbe ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial v}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial v}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Innerhalb des Ebenenbüschels um die Tangente ist aber die Tangentenebene der Fläche durch den Wert

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

fixiert, welcher, da u und v in allen Punkten der Kurve die festen Werte C_1 und C_2 haben, in allen Punkten der Kurve unverändert derselbe ist, so dafs, wie wir sagten, die Tangentenebenen längs einer Kurve durch ein Anfangselement vollkommen bestimmt sind.

Will man dieses Gesetz der Tangentenebene direkt an der Differentialgleichung erkennen, so hat man folgendermafsen zu verfahren: Die Gleichung

$$Pp + Qq = R$$

ist eine Identität, wenn man z als eine Integralfunktion von x und y betrachtet und p und q die Ableitungen von z sind. Also bleibt die Gleichung erhalten, wenn man sie partiell, sowohl nach x wie nach y differentiiert; es wird demnach:

$$p\left(\frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial z}\right) + P\frac{\partial p}{\partial x} + q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z},$$

$$p\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) + P\frac{\partial p}{\partial y} + q\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + q\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + q\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Geht man in der Richtung einer Systemkurve weiter, so ist:

$$dx : dy = P : Q,$$

ferner ist:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

und also

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = P\frac{dp}{dx};$$

mithin wird die erste Gleichung, indem man

$$Pp + Qq - R = f, \quad \frac{\partial P}{\partial x}p + \frac{\partial Q}{\partial x}q - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

setzt (wobei x, y, z, p, q als unabhängige Variabele gelten):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + P\frac{dp}{dx} = 0,$$

und ebenso die zweite:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + Q\frac{dq}{dy} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die totalen Änderungen, welche die Koordinaten p und q erfahren, wenn man längs einer Systemkurve fortschreitet; man erkennt aus denselben wiederum, daſs jede Integralfläche nicht nur ein bestimmtes Gesetz für diese Änderung der Tangentenebene liefert, sondern daſs dieselbe durch ein Anfangselement für alle Integralflächen festgelegt ist.

Giebt man dem simultanen Systeme

$$dx : dy : dz = P : Q : R$$

die Form

$$dx : dy : dz = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q},$$

so kann man das Gesetz der Fortschreitungsrichtung und der Tangentenebene durch die Gleichungen:

$$dx:dy:dz:dp:dq = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

darstellen. Bezeichnet man eine Raumkurve dieses Systemes mit einer bestimmten, durch ein Anfangselement festgelegten Zuordnung ihrer Tangentenebenen als eine *Charakteristik* der partiellen Differentialgleichung, so giebt es ∞^3 Charakteristiken,

die durch das vollständige Integral dieser simultanen vier Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Gleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

erhalten werden. Auf jeder Integralfläche sind einfach unendlich viele Charakteristiken zu einer Fläche vereinigt.

824. Lineare Gleichungen mit beliebig vielen Variabelen. Die vorstehende Entwickelung läfst sich auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung anwenden, welche in Bezug auf die Ableitungen linear sind, wie grofs auch die Zahl der unabhängigen Variabelen sein mag. Dies wollen wir hier nachweisen.

Wir werden mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n unabhängigen Variabelen bezeichnen, mit x die Hauptvariabele, d. h. die unbekannte Funktion der $x_1 \ldots x_n$; ferner werden wir

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

setzen, so dafs die Gröfsen p die partiellen Ableitungen sind.

Die allgemeine Form der linearen partiellen Differentialgleichungen, welche wir nun betrachten, ist:

$$(1) \qquad P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = P;$$

$P_1, P_2, \ldots P_n$ und P sind gegebene Funktionen der $n+1$ Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$. Ist P identisch 0, so heifst die Gleichung homogen. In Nr. 727 betrachteten wir den noch spezielleren Fall, dafs aufserdem noch die $P_1 \ldots P_n$ frei von x sind. Allgemein haben wir in Nr. 89 gezeigt: sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ gegebene Funktionen der Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und stellt Φ eine willkürliche Funktion dar, so führt die Gleichung

$$(2) \qquad \Phi(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) = 0$$

zu einer partiellen Differentialgleichung von der Form (1), wenn man dieselbe partiell differentiiert, und die willkürliche Funktion eliminiert. Wir untersuchen nun umgekehrt, ob es möglich ist, wenn die Gleichung (1) gegeben ist, ihr durch eine Gleichung von der Form (2) Genüge zu leisten, indem die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ in geeigneter Weise bestimmt werden. Indem man die Gleichung (2) nach jeder der unabhängigen Variabelen differentiiert, erhält man das System:

$$
(3) \qquad \begin{cases}
\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0.
\end{cases}
$$

Damit die Gleichung (2) der gegebenen Differentialgleichung (1) genügt, ist notwendig und hinreichend, daſs die Elimination der Ableitungen $p_1, p_2, \ldots p_n$ zwischen den Gleichungen (1) und (3) zu einer Identität führt. Diese Elimination läſst sich dadurch ausführen, daſs man die Gleichungen (3) addiert, nachdem man sie zuvor mit $P_1, P_2, \ldots P_n$ multipliziert hat, und daſs man dabei die Gleichung (1) berücksichtigt; man findet so:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(P\frac{\partial u_1}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) \\
+ &\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(P\frac{\partial u_2}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right) \\
+ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ &\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(P\frac{\partial u_n}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist erfüllt, was auch die Funktion Φ sein mag, wenn die Identitäten bestehen:

$$
(4) \qquad \begin{cases}
P\frac{\partial u_1}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0, \\
P\frac{\partial u_2}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P\frac{\partial u_n}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0,
\end{cases}
$$

und wir wissen (Nr. 727), daſs diese Gleichungen in der That gelten, wenn die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ derart gewählt sind, daſs die Gleichungen

$$
u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \ldots u_n = \text{const.}
$$

die n Integrale sind des Systemes von simultanen Differentialgleichungen

$$(5)\qquad \frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

825. Das allgemeine Integral der linearen Gleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen. In der nämlichen Weise wie in Nr. 822 kann man ferner zeigen, daſs, abgesehen von den dort erwähnten Ausnahmefällen, wo alle Funktionen $P, P_1, P_2, \ldots P_n$ durch eine und dieselbe Funktion von $x_1, x_2 \ldots x_n$ zu Null gemacht werden, jede Lösung der Gleichung (1) in der Gleichung (2) enthalten sein muſs; denn es sei:

$$(6)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

solch eine Lösung, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial x} = 0;$$

entnimmt man hieraus die Werte von $p_1, p_2, \ldots p_n$, und substituiert dieselben in die Gleichung (1), so folgt:

$$(7)\qquad P\frac{\partial F}{\partial x} + P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Nehmen wir nun an, daſs man die Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Ausnahme von x_i als Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ und x_i dargestellt hat, und daſs:

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = f_i(u_1, u_2, \ldots u_n, x_i)$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x},\\
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial F}{\partial x_{i-1}} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_{i-1}},\\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Indem man diese Werte in die Gleichung (7) einführt, und dieselbe vermittelst der Gleichungen (4) reduziert, folgt:

$$P_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Wenn also die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots P_n$ und P nicht vermittelst der Gleichung (6) verschwinden, so mufs

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

sein, und diese Gleichung mufs, da zwischen den Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ keine Relation besteht, identisch erfüllt sein. Hieraus folgt, dafs die Gleichung (6) in der That die Form (2) hat.

Die Lösung, die wir durch vorstehende Methode gefunden haben, nennen wir *das allgemeine Integral* der vorgelegten Gleichung. Das Resultat unserer Untersuchungen läfst sich in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Lehrsatz. *Es seien $x, x_1, \ldots x_n$ die $n+1$ Variabelen, von denen die erste eine Funktion der anderen ist;*

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

sei das totale Differential dx von x, endlich $P, P_1, P_2, \ldots P_n$ gegebene Funktionen der $n+1$ Variabelen. Um das allgemeine Integral der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = P$$

zu erhalten, genügt es, das simultane System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n}$$

zu integrieren. Bezeichnet man mit

$$u_1 = const., \quad u_2 = const., \ldots u_n = const.$$

die Integrale dieser Gleichungen, dieselben aufgelöst nach den willkürlichen Konstanten, so ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0,$$

wobei Φ eine willkürliche Funktion bedeutet.

Bemerkung. Die in Nr. 823 gegebenen Erörterungen lassen sich auch auf den allgemeinen Fall übertragen, wenn man in einer Mannigfaltigkeit von $n+1$ Dimensionen die entsprechenden geometrischen Formulierungen wie im dreidimensionalen Gebiete anwendet.

Die willkürliche Funktion ist bei gegebenen Problemen aus besonderen Bedingungen zu bestimmen. Man kann z. B. als Bedingung stellen, daſs x sich auf eine gegebene Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ reduzieren soll, wenn man der Variabelen x_n einen bestimmten Wert ξ_n beilegt. Denn es ist leicht zu sehen, wie sich die Funktion Φ stets so bestimmen läſst, daſs diese Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet nämlich ξ_n einen bestimmten Wert und f die gegebene Funktion, so werden, indem man

$$x_n = \xi_n, \quad x = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

annimmt, $u_1, u_2, \ldots u_n$ Funktionen der $n-1$ Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Es sei also:

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}), \\ u_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n &= \psi_n(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}); \end{aligned}$$

dann ergiebt die Elimination von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ zwischen diesen Gleichungen ein Resultat von der Form

$$\Psi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0,$$

und es ist evident, daſs die geforderte Bedingung erfüllt ist, wenn man für Φ die Funktion Ψ wählt.

§ 2. Differentialgleichungen für Flächenfamilien.

826. Cylinderflächen. *Man soll die Gleichung der Cylinderflächen aus der partiellen Differentialgleichung für diese Flächen ableiten.*

Werden die geradlinigen Koordinaten im Raum mit x, y, z bezeichnet, und wird wie gewöhnlich

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

gesetzt, so liefert die Bedingung, dafs die Tangentenebene parallel zu einer festen Geraden ist, die partielle Differentialgleichung der Cylinder (Nr. 345):

$$ap + bq = 1, \tag{1}$$

wobei a und b gegebene Konstanten sind. Diese Gleichung ist zu integrieren.

Zu dem Zwecke bilden wir das simultane System

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

oder

$$dx - a\,dz = 0, \quad dy - b\,dz = 0.$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$x - az = \text{const.}, \quad y - bz = \text{const.},$$

und folglich ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi(x - az, \quad y - bz) = 0. \tag{2}$$

Will man die willkürliche Funktion durch die Bedingung bestimmen, dafs die Cylinderfläche durch eine gegebene Kurve geht, deren Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

sind, so setze man

$$x - az = u, \quad y - bz = v.$$

Alsdann lassen sich die Gleichungen (3) folgendermafsen schreiben:

$$\varphi(u + az, v + bz, z) = 0, \quad \psi(u + az, v + bz, z) = 0.$$

Eliminiert man aus denselben z, so bekommt man eine Gleichung von der Form:

$$\Psi(u, v) = 0 \quad \text{oder} \quad \Psi(x - az, y - bz) = 0,$$

folglich mufs man für Φ die Funktion Ψ wählen.

Nehmen wir zweitens an, dafs die Funktion Φ durch die Bedingung zu bestimmen ist, dafs der Cylinder einer gegebenen Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

umschrieben sei. Alsdann genügt es, die Berührungskurve zwischen dieser Fläche und dem Cylinder zu ermitteln; denn

ist diese Kurve bekannt, so hat man die Bedingungen des vorigen Falles. Wir bilden die Gleichungen der Tangentenebenen im Punkte (x, y, z) an die gegebene Fläche und an den Cylinder, nämlich:

$$(\xi - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Da die Tangentenebenen zusammenfallen, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

und wegen der Gleichung (1) wird:

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt zusammen mit der Flächengleichung die gemeinsame Berührungskurve; man gewinnt alsdann die Lösung ebenso wie vorhin.

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken werden für die vorliegende partielle Differentialgleichung:

$$dx:dy:dz:dp:dq = a:b:1:0:0,$$

d. h. für dieselben ist $dp = 0$ und $dq = 0$, also

$$p = C, \quad q = C',$$

wobei die Konstanten C und C' der Relation genügen

$$aC + bC' = 1.$$

Es bildet also eine Erzeugende des Cylinders zusammen mit einer festen durch dieselbe gehenden Ebene eine Charakteristik. In der That ist für jede Cylinderfläche die Tangentenebene längs einer Erzeugenden invariant.

827. Kegelflächen. *Man soll die Gleichung der Kegelflächen aus ihrer partiellen Differentialgleichung ableiten.*

Die partielle Differentialgleichung der Kegelflächen wird erhalten (Nr. 346), indem man die Bedingung ausdrückt, daſs jede Tangentenebene durch einen festen Punkt hindurchgeht, welcher der Scheitel der Fläche ist. In geradlinigen Koordinaten wird also diese Gleichung

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,$$

wobei x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Scheitels sind. Um sie zu integrieren, hat man die Integrale der simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{x-x_0}=\frac{dy}{y-y_0}=\frac{dz}{z-z_0}$$

zu bestimmen. Dieselben sind

$$l(x-x_0)-l(z-z_0)=\text{const.},\quad l(y-y_0)-l(z-z_0)=\text{const.},$$

oder

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=\text{const.},\quad \frac{y-y_0}{z-z_0}=\text{const.}$$

Hieraus folgt, daſs das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$$

ist. Man muſs in derselben Weise wie vorhin verfahren, wenn man die Funktion Φ aus den Bedingungen bestimmen will, daſs der Kegel durch eine gegebene Kurve geht oder einer gegebenen Fläche umschrieben ist.

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken sind hier:

$$dx:dy:dz:dp:dq=x-x_0:y-y_0:z-z_0:0:0;$$

sie drücken wiederum aus, daſs längs einer Erzeugenden die Tangentenebene einer Fläche ungeändert bleibt.

828. Konoïdflächen. *Die Gleichung der Konoidflächen aus ihrer partiellen Differentialgleichung zu bestimmen.*

Die partielle Differentialgleichung wird erhalten (Nr. 347), indem man die Bedingung darstellt, daſs die Tangentenebene in jedem Punkte die Erzeugende enthält, welche durch denselben hindurchgeht. Diese Gleichung wird, in geradlinigen Koordinaten:

$$px+qy=0,$$

wenn man die Leitgerade zur z-Achse und die Leitebene zur xy-Ebene wählt. Man hat also die Integrale des simultanen Systemes

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0}$$

zu bestimmen; dieselben sind:

$$\frac{y}{x}=\text{const.},\quad z=\text{const.},$$

und folglich ist

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

die Gleichung der Konoidflächen, wobei φ eine willkürliche Funktion ist.

Die Charakteristiken haben dem Systeme zu genügen:

$$dx:dy:dz:dp:dq = x:y:0:-p:-q,$$

also ist

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{q}{p} = \text{const.}$$

Aus der partiellen Differentialgleichung folgt

$$\frac{q}{p} = -\frac{x}{y},$$

und da für eine Erzeugende

$$\frac{y}{x} = C,$$

d. h. konstant ist, so ist

$$\frac{q}{p} = -\frac{1}{C} = \text{const.}$$

das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebenen einer Fläche längs einer Erzeugenden ändern.

829. Rotationsflächen. *Die Gleichung der Rotationsflächen mit gegebener Achse aus ihrer partiellen Differentialgleichung zu finden.*

Die partielle Differentialgleichung ist

$$py - qx = 0,$$

wenn man annimmt, daſs die Koordinaten rechtwinklig sind, und daſs die z-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt; man erhält dieselbe (Nr. 348), indem man die Bedingung ausdrückt, daſs die Normale die Achse schneidet. Hier muſs man die simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

oder

$$xdx + ydy = 0, \quad dz = 0$$

integrieren. Die Integrale sind

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \quad z = \text{const.};$$

also ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

wenn φ eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Die Charakteristiken werden dargestellt durch:

$$dx : dy : dz : dp : dq = y : -x : 0 : q : -p,$$

also ist:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{y}{q} = \frac{x}{p} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dq} = \frac{x}{p} = \frac{y}{q},$$

folglich wird

$$\frac{p}{x} = C_1 \quad \text{und} \quad \frac{q}{y} = C_2,$$

und zufolge der partiellen Differentialgleichung ist $C_1 = C_2$. Die erzeugenden Kurven werden hier von den zweifach unendlich vielen Kreisen gebildet, deren Ebene der xy-Ebene parallel ist, und deren Mittelpunkt auf der z-Achse liegt. In den Punkten solch einer Erzeugenden ändern sich die Tangentenebenen einer Fläche so, dafs

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = C_1$$

konstant bleibt. Dadurch ist ausgedrückt, dafs die Ebene in ihrem Berührungspunkte die Tangente des Kreises enthält und die Rotationsachse in einem festen Punkte schneidet, für welchen

$$\zeta = z - px - qy = z - C_1(x^2 + y^2)$$

ist.

330. Ein weiteres Beispiel. *Man soll die partielle Differentialgleichung*

$$z = px + qy + f(x, y) \tag{1}$$

integrieren, wobei $f(x, y)$ eine gegebene Funktion bezeichnet.

Das System der gewöhnlichen Gleichungen, welches man hier zu bilden hat, ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - f(x, y)}$$

oder

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} + \frac{f(x, y)}{x} = 0. \tag{2}$$

Aus der ersten folgt $ly = lx + \text{const.}$, oder

$$y = Cx. \tag{3}$$

Trägt man diesen Wert von y in die zweite Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} + \frac{f(x, Cx)}{x} = 0.$$

Diese Gleichung ist eine lineare, und ihr Integral wird:

$$z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, Cx)}{x^2}\,dx, \tag{4}$$

wenn C' eine neue Konstante und x_0 irgend einen Anfangswert von x bezeichnet. Nun mufs man die beiden Integrale (3) und (4) nach den Konstanten C und C' auflösen und zwischen diesen Werten eine willkürliche Relation einführen. Zu dem Zwecke ersetzen wir die Variabele x unter dem Integrale durch ein anderes Zeichen ξ; es wird also:

$$z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi, C\xi)}{\xi^2}\,d\xi,$$

oder, indem man für C seinen Wert aus der Gleichung (3) substituiert:

$$z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)}{\xi^2}\,d\xi. \tag{5}$$

Sonach sind aus den Gleichungen (3) und (5) die Werte von C und C' zu entnehmen und in die Gleichung

$$C' = \varphi(C) \tag{6}$$

einzusetzen, wobei φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Man erhält folglich:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x\int_{x_0}^{x} \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)}{\xi^2}\,d\xi. \tag{7}$$

Dies ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (1). Nehmen wir an, dafs die Funktion $f(x, y)$ gleich ist:

$$f(x, y) = \frac{axy}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{a^2+y^2}},$$

wobei a eine gegebene Konstante bezeichnet; dann lautet die Differentialgleichung:

$$z = px + qy + \frac{axy}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + y^2}},$$

und nach der Formel (7) ist ihr allgemeines Integral, indem man $x_0 = 0$ wählt:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - ay\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 + \xi^2}\sqrt{a^2 + \frac{y^2\xi^2}{x^2}}},$$

oder, wenn man $x > 0$ annimmt, und unter dem Integrale

$$\xi = \alpha x, \quad d\xi = x d\alpha$$

setzt:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - axy\int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2 + x^2\alpha^2}\sqrt{a^2 + y^2\alpha^2}}.$$

§ 3. Totale Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabelen.

331. Integrabilitätsbedingung. Bevor wir die Untersuchung der partiellen Differentialgleichungen fortsetzen, müssen wir von den totalen Differentialgleichungen handeln. Wir beschränken uns dabei auf den Fall dreier Variabelen x, y, z, von denen die eine als Funktion der beiden anderen angesehen wird; die Gleichung, welche wir zu untersuchen haben, ist:

$$(1) \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

P, Q, R sind gegebene Funktionen von x, y, z. Es handelt sich nun darum, festzustellen, ob eine Funktion z von x und y existiert, welche die Gleichung (1) befriedigt, und diese Funktion, falls sie existiert, zu bestimmen. Eine Funktion

$$z = f(x, y)$$

genügt der Differentialgleichung dann, wenn ihr totales Differential

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

bei jedem Werte der unabhängigen Variabelen identisch ist mit dem totalen Differentiale

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy.$$

Dies erfordert also, dafs unter der Bedingung

$$z = f(x, y)$$

die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{Q}{R}.$$

Bezeichnet man die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion z mit p und q, so kann man diese Gleichungen auch schreiben:

$$P + Rp = 0, \quad Q + Rq = 0. \tag{2}$$

Also müssen wir durch die nämliche Funktion z zwei partielle Differentialgleichungen zugleich befriedigen, und dieses ist nicht anders möglich, als wenn zwischen den beiden Gleichungen eine Beziehung besteht. In der That, differentiiert man die erste der Gleichungen (2) nach y, die andere nach x, so folgt:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) + p\left(\frac{\partial R}{\partial y} + q\frac{\partial R}{\partial z}\right) + R\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z}\right) + R\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander und beachtet, dafs

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

ist, so folgt:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0,$$

oder, indem man p und q vermittelst der Gleichung (2) eliminiert:

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung mufs vermittelst der Funktion

$$f(x, y, z) = 0$$

befriedigt sein, falls diese Funktion ein Integral der totalen Differentialgleichung (1) sein soll. Verlangen wir aber weiter, daſs die Differentialgleichung (1) ein Flächensystem als Integral besitzt, welches wir in der Form

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

annehmen können, so muſs die Gleichung (3) bei allen Werten von x, y und z gelten, d. h. sie muſs identisch erfüllt sein. Diese Bedingung zwischen den Funktionen P, Q, R ist eine *notwendige*, damit die Gleichung (1) *integrabel* ist. Wir können aber ferner beweisen, daſs sie auch *hinreichend* ist; dies wollen wir nun thun, indem wir direkt auf die Bestimmung der Lösungen eingehen, welche die Gleichung (1) zulassen kann.

832. Existenz von Lösungen. Wir nehmen an, die Integrabilitätsbedingung (3) sei identisch für unabhängige Variabele x, y, z erfüllt. Wir beweisen die Existenz eines Flächensystemes $f = \text{const.}$, welches (1) erfüllt. Wir bezeichnen mit μ einen Faktor, mittelst dessen der Ausdruck

$$Q dy + R dz$$

ein exaktes Differential einer Funktion u der Variabelen y und z wird; dieser Faktor μ und die Funktion u werden im allgemeinen noch von der Gröſse x abhängen, welche zunächst als ein Parameter betrachtet wird. Wir setzen also:

$$(4) \qquad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

und schreiben ferner:

$$(5) \qquad \mu P = \frac{\partial u}{\partial x} + X.$$

X bezeichnet dabei eine bestimmte Funktion von x, y, z, die jedoch an u und μ durch eine Bedingung gebunden ist, welche man aus (3) erhält, wenn man aus (4) und (5) die Werte von P, Q und R in (3) einträgt. Man erhält dann, wenn ν den reziproken Wert von μ bedeutet:

$$(4\text{a}) \qquad P = \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \nu X, \quad Q = \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Wäre hier X identisch null, so würde (1) durch die ganze Flächenschar $u = \text{const.}$ erfüllt und (3) gälte identisch

in x, y, z. Hieraus folgt aber, daſs beim Einsetzen der Werte von P, Q, R aus (4a) in (3) alle die Glieder sich aufheben müssen, welche X gar nicht enthalten. Läſst man also diese bei der Rechnung gleich fort, so reduziert sich die Bedingung für X auf:

$$(5a)\qquad R\cdot\frac{\partial(\nu X)}{\partial y}+\nu X\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)-Q\cdot\frac{\partial(\nu X)}{\partial z}=0.$$

Wäre nun X eine Konstante, so würden nach (4a) μP, μQ und μR die partiellen Ableitungen von

$$u+xX$$

nach x, y und z sein. Dann wäre (1) durch die Flächenschar

$$u+xX=\text{const.}$$

erfüllt, und (3), also auch (5a) gälte identisch in x, y, z. Wir schlieſsen hieraus, daſs in (5a) alle die Glieder sich aufheben müssen, die zwar X selbst, aber nicht seine partiellen Ableitungen enthalten. Es reduziert sich daher (5a) auf:

$$\nu\left(R\frac{\partial X}{\partial y}-Q\frac{\partial X}{\partial z}\right)=0,$$

wie man auch unmittelbar durch direkte Ausrechnung bestätigt. Setzt man hier für Q und R ihre Werte aus (4) ein, so folgt identisch in x, y, z:

$$\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Es wird also (Nr. 724) X eine Funktion von x und u allein, wenn man statt z die Variabele u einführt. Die Gleichung (1), multipliziert mit μ, wird nun:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+X\right)dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0,$$

oder:

$$(6)\qquad du+Xdx=0.$$

Da u eine Funktion von x, y, z ist, so kann man z als Funktion von x, y, u betrachten, und also wird auch X eine Funktion der nämlichen Variabelen. Dann hängt aber, wie eben bewiesen, X nicht mehr von y ab. Es reduziert sich also (1)

auf eine gewöhnliche Differentialgleichung (6) zwischen x und u allein, welche immer ein vollständiges Integral der Form

$$f(x, u) = \text{const.}$$

besitzt. Führt man für u wieder seinen Ausdruck in x, y, z ein, so möge werden:

$$f(x, u) = f(x, y, z).$$

Alsdann geht (6) wieder in (1) über; die Gleichung wird also durch eine Flächenschar

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

erfüllt. Wir sehen also:

Der Differentialgleichung (1) *wird dann und nur dann durch eine Flächenschar $f = \text{const.}$ genügt, wenn die Integrabilitätsbedingung* (6) *identisch erfüllt ist.*

Hieraus folgt unmittelbar:

Ist (6) *identisch erfüllt, so existiert immer ein Faktor λ, so dafs*

$$\lambda(P dx + Q dy + R dz) = dU$$

ein vollständiges Differential wird.

Man erkennt endlich, dafs die vorstehenden Betrachtungen gleichzeitig eine Integrationsmethode für die totale Differentialgleichung (1) liefern, wenn (3) identisch erfüllt ist.

333. Geometrische Deutung. Die Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

ist von Herrn Vofs geometrisch interpretiert worden. Durch dieselbe wird jedem Punkt des Raumes ein Strahlbüschel von Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, welche in einer durch den Punkt gehenden Ebene

$$P(\xi - x) + Q(\eta - y) + R(\zeta - z) = 0$$

gelegen sind; sonach erhält man ein Punkt-Ebenensystem allgemeinster Art, das im besonderen den Charakter der Zuordnung annehmen kann, welche durch ein Flächensystem zwischen den Punkten der Flächen und ihren Tangentenebenen erzeugt wird. Hier soll nur kurz angegeben werden, in welcher Weise sich der Inhalt der Integrabilitätsbedingung ausdrücken läfst. Geht

man von einem Punkte (x, y, z) in einer bestimmten, der zugeordneten Ebene angehörigen Richtung $d_1 x, d_1 y, d_1 z$ fort, so entspricht diesem neuen Punkte die Ebene

$$(P+d_1 P)(\xi - x - d_1 x) + (Q + d_1 Q)(\eta - y - d_1 y) + (R + d_1 R)(\zeta - z - d_1 z) = 0,$$

und es ist

$$P d_1 x + Q d_1 y + R d_1 z = 0.$$

Die beiden Ebenen schneiden sich längs einer Richtung, welche durch die Gleichungen

$$d_2 x : d_2 y : d_2 z = (Q d_1 R - R d_1 Q) : (R d_1 P - P d_1 R) : (P d_1 Q - Q d_1 P)$$

bestimmt ist, vermöge deren zwischen den beiden Richtungen d_1 und d_2 eine *projektive* Beziehung stattfindet, deren Doppelelemente durch die Gleichungen

$$\varrho\, dx = Q dR - R dQ,$$
$$\varrho\, dy = R dP - P dR,$$
$$\varrho\, dz = P dQ - Q dP$$

oder durch die quadratische Gleichung für ϱ:

$$\varrho^2 - \varrho G - H = 0$$

bestimmt sind, in welcher

$$G = P(Q_3 - R_2) + Q(R_1 - P_3) + R(P_2 - Q_1),$$

$$H = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q \\ R_1 & R_2 & R_3 & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{\partial P}{\partial x} = P_1 \text{ u.s.w.}$$

gesetzt wird.

Die projektive Beziehung ist im allgemeinen keine *involutorische*; sie wird dieses nur dann, wenn in der quadratischen Gleichung $G = 0$ ist; dann ordnen sich die benachbarten Ebenen genau so, wie die einem Flächenpunkte benachbarten Tangentialebenen, d. h. je zwei Richtungen d_1 und d_2 sind einander wechselseitig konjugiert, und die beiden sich selbst entsprechenden Richtungen sind die der Haupttangenten (Nr. 314).

Ist die Gleichung $G=0$ identisch erfüllt, so gruppieren sich die Flächenelemente zu einfach unendlich vielen Flächen eines Systemes, dem Integrale der Differentialgleichung.

834. Spezialfall, dafs P, Q, R homogen und von gleichem Grade sind. — Wir nehmen an, dafs die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, und setzen:

$$x = x'z, \quad y = y'z,$$
$$P = P'z^n, \quad Q = Q'z^n, \quad R = R'z^n,$$

P', Q', R' sind Funktionen von x' und y'. Die vorgelegte Differentialgleichung, dividiert durch z^{n+1}, wird dann:

$$(P'dx' + Q'dy') + (P'x' + Q'y' + R')\frac{dz}{z} = 0$$

oder:

$$\frac{dz}{z} + \frac{P'dx' + Q'dy'}{P'x' + Q'y' + R'} = 0.$$

Das zweite Glied in dieser Gleichung hängt nur von den Variabelen x' und y' ab und mufs, auf Grund der Bedingungsgleichung, ein exaktes Differential sein.

Als Beispiel behandeln wir die Gleichung:

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (x^2 + xz + z^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0.$$

Hier ist:

$$P' = y'^2 + y' + 1, \quad Q' = x'^2 + x' + 1, \quad R' = x'^2 + x'y' + y'^2,$$

und die gegebene Gleichung bekommt die Form:

$$\frac{dz}{z} + \frac{(y'^2 + y' + 1)\,dx' + (x'^2 + x' + 1)\,dy'}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = 0.$$

Nun wird durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{y'^2 + y' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = \frac{y' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1},$$

$$\frac{x'^2 + x' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = \frac{x' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1},$$

so dafs unsere Gleichung in der Form darstellbar ist:

$$\frac{dz}{z} + \frac{d(x'y' + x' + y')}{x'y' + x' + y'} - \frac{d(x' + y' + 1)}{x' + y' + 1} = 0.$$

Jedes dieser Glieder ist ein exaktes Differential; die Integration ergiebt, wenn man mit α eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$lz + l(x'y' + x' + y') - l(x' + y' + 1) = l\alpha,$$

also:

$$z = \frac{\alpha(x' + y' + 1)}{x'y' + x' + y'}$$

oder, wenn man $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ an Stelle von x' und y' einführt:

$$xy + xz + zy = \alpha(x + y + z).$$

§ 4. Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen.

835. Allgemeine Definitionen. Wir schicken zunächst einige Definitionen voraus, die wir, um Wiederholungen zu vermeiden, gleich für n unabhängige Veränderliche aussprechen. Angewandt werden sie in diesem Paragraphen aber nur auf den Fall $n = 2$.

Die Variabele x werde daher als Funktion der n Variabelen $x_1, x_2 \dots x_n$ betrachtet und

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

gesetzt. Jede Gleichung von der Form

$$F(x, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0$$

ist alsdann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Wenn man x als Funktion von $x_1, x_2, \dots x_n$ so bestimmt hat, dafs diese Funktion der vorgelegten Gleichung genügt und sich auf eine willkürliche Funktion ξ von $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ reduziert, wenn man der einen Variabelen x_n einen bestimmten, willkürlich gewählten Wert ξ_n beilegt, so heifst die Gleichung, welche diesen Wert von x definiert, *das allgemeine Integral* der vorgelegten Differentialgleichung.

Die vorgelegte Gleichung, sowie diejenigen, welche man aus derselben durch successive Differentiationen ableitet, bestimmen die Werte von x und seiner Ableitungen verschiedener Ordnung in Bezug auf x_n als Funktionen von $x, x_1, x_2, \dots x_n$

und der Ableitungen von x in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Hieraus erkennt man leicht, daſs das allgemeine Integral, wenn es existiert, auch ein eindeutig bestimmtes ist.

Lagrange hat als *vollständiges Integral* einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabelen jede Funktion der n Variabelen bezeichnet, welche der Differentialgleichung genügt und n willkürliche Konstanten enthält. Es sei

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \tag{1}$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den n unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$, und

$$f(x, x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \tag{2}$$

ein vollständiges Integral derselben. Differentiiert man diese Gleichung successive nach jeder der unabhängigen Variabelen, so wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Die Gleichung (1) muſs identisch, d. h. bei allen Werten von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $a_1, a_2, \ldots a_n$ erfüllt sein, wenn man in derselben x und $p_1, p_2, \ldots p_n$ durch ihre Werte ersetzt, welche aus den Gleichungen (2) und (3) hervorgehen; also muſs man die Gleichung (1) reproduzieren, wenn man die n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus den Gleichungen (2) und (3) eliminiert.

Da das allgemeine Integral der Gleichung (1) eine willkürliche Funktion von $n - 1$ Variabelen enthält, so ist evident, daſs man aus derselben unendlich viele vollständige Integrale ableiten kann. Aber besonders bemerkenswert ist, daſs man aus einem vollständigen Integrale eine Lösung ableiten kann, welche eine willkürliche Funktion von $n - 1$ Variabelen enthält und im allgemeinen mit dem allgemeinen Integrale zusammenfällt.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes betrachten wir die willkürliche Konstante a_n der Gleichung (2) als eine willkürliche Funktion $\varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ der $n - 1$ übrigen Konstanten. Die Gleichung (2), welche die Gleichung (1) befriedigt

unter der Annahme, daſs die willkürlichen Gröſsen konstant sind, verliert diese Eigenschaft nicht, auch wenn man dieselben als variabel betrachtet, falls nur die Gleichungen (3) dabei bestehen bleiben.

Wir bilden das totale Differential der Gleichung (2), indem wir die willkürlichen Gröſsen als variabel ansehen und dabei annehmen, daſs a_n durch seinen Wert

$$a_n = \varphi(a_1, a_2, \dots a_{n-1}) \tag{4}$$

ersetzt ist; schreiben wir dabei auch

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

an Stelle von dx, so wird

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx_n + \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} da_{n-1} = 0.$$

Es ist evident, daſs man hieraus die Gleichungen (3) gewinnt, wenn die willkürlichen Gröſsen $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \dots \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} = 0 \tag{5}$$

definiert werden.

Könnte man die Gröſsen $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ zwischen den Gleichungen (2), (4), (5) eliminieren, so erhielte man eine Gleichung, welche eine willkürliche Funktion von $n-1$ Gröſsen enthält und der ursprünglichen Differentialgleichung genügt. Diese Elimination aber ist allgemein nicht möglich wegen der willkürlichen Funktion φ, die in die Gleichung (2) eingeht und deren partielle Ableitungen in den Gleichungen (5) auftreten; man muſs also das System der Gleichungen (2) und (5) zusammen mit der Gleichung (4) beibehalten; dasselbe definiert in ausreichender Weise das allgemeine Integral.

Man erkennt demnach, daſs jede partielle Differentialgleichung umgekehrt aus der Elimination einer willkürlichen Funktion resultiert gemäſs der in Nr. 88 ff. entwickelten Methode. Dies setzt indessen voraus, daſs die Existenz des allgemeinen Integrales bewiesen ist.

836. Lineare Gleichungen. Die vorstehenden Bemerkungen beziehen sich auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir haben aber in Nr. 825 gesehen, daſs bei den linearen Gleichungen sich das allgemeine Integral in einer besonderen Form darstellen läſst, die nur für diese Art von Gleichungen Geltung hat. Dieses Integral muſs also mit demjenigen übereinstimmen, welches man aus einem vollständigen Integrale ableitet. Wir wollen dies an einem Beispiel nachweisen.

Wir betrachten die Gleichung

$$z = px + qy,$$

welche in Bezug auf die Ableitungen linear ist; z ist eine unbekannte Funktion der Variabelen x und y, und wir setzen wie gewöhnlich:

$$dz = pdx + qdy.$$

Der vorliegenden Gleichung wird nun genügt, indem man

$$z = ax + by$$

annimmt, wobei a und b Konstanten sind, denn hieraus folgt

$$p = a, \quad q = b.$$

Diese Gleichung ist also ein vollständiges Integral. Um das allgemeine zu erhalten, hat man nach der Methode der Nr. 835 b durch eine willkürliche Funktion $\varphi(a)$ von a zu ersetzen und alsdann a zwischen den beiden Gleichungen

$$z = ax + y\varphi(a), \quad 0 = x + y\varphi'(a)$$

zu eliminieren, von denen die zweite aus der Differentiation der ersten nach a hervorgeht. Nach der zweiten Gleichung ist

$$\varphi'(a) = -\frac{x}{y},$$

also sind a und $\varphi(a)$ Funktionen von $\frac{y}{x}$, und die erste Gleichung lehrt, daſs

$$\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist. Die Funktion ψ bleibt dabei noch willkürlich, und sonach erhalten wir auf diesem Wege dasselbe Integral wie in Nr. 827.

337. Umformung des Integrationsproblemes. Das Problem der Integration partieller Differentialgleichungen ist gegenwärtig vollständig gelöst bei den Gleichungen erster Ordnung, d. h. die Integration solch einer Gleichung kann, wie grofs auch die Zahl der unabhängigen Variabelen ist, immer auf die Integration eines simultanen Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Unter den Methoden, welche dazu dienen, mufs man vor allem die von Jacobi und die von Cauchy unterscheiden. Die letztere werde ich hier zu Grunde legen und zugleich einige Entwickelungen mitteilen, die auf eine Schwierigkeit Bezug nehmen, welche dieser Methode anhaftet; dieselbe habe ich bereits an einem anderen Orte veröffentlicht.

Wir betrachten zuerst den Fall zweier unabhängigen Variabelen. Es sei

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

die vorgelegte Gleichung, in welcher z eine unbekannte Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y und p und q bezüglich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ bezeichnen.

Die Aufgabe ist, einen Wert z zu finden, welcher der Gleichung (1) genügt bei allen Werten von x und y, und welcher sich für einen gegebenen Wert x_0 von x auf eine willkürlich gegebene Funktion $f(y)$ von y reduziert. Es müssen also gleichzeitig die Gleichungen gelten:

$$x = x_0, \quad z = f(y), \quad q = \frac{df(y)}{dy} = f'(y);$$

durch diese Bedingungen ist die Aufgabe vollkommen bestimmt.

Wir führen, mit Cauchy, eine unbestimmte Funktion y_0 von x und y ein; alsdann kann man y als eine Funktion von x und y_0 ansehen, und also sind auch z, p, q Funktionen der nämlichen beiden Variabelen. Es ist:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0,$$

und wenn man diese Werte von dz und dy in die Gleichung, welche p und q definiert,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

überträgt, so folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y_0}dy_0 = p\,dx + q\left(\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y_0}dy_0\right).$$

Da diese Relation bei allen Werten von dx und dy_0 gilt, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}. \tag{3}$$

Differentiiert man die Gleichung (2) nach y_0 und die Gleichung (3) nach x, so folgt aus der Subtraktion derselben:

$$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{4}$$

Dies festgestellt, bezeichnen wir mit

$$dF = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq$$

das totale Differential der linken Seite in der Gleichung (1). Differentiiert man die Gleichung (1) nach y_0, so folgt:

$$Y\frac{\partial y}{\partial y_0} + Z\frac{\partial z}{\partial y_0} + P\frac{\partial p}{\partial y_0} + Q\frac{\partial q}{\partial y_0} = 0. \tag{5}$$

In diese Gleichung tragen wir die Werte von $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ und $\frac{\partial p}{\partial y_0}$ aus den Gleichungen (3) und (4) ein, so wird:

$$\left(Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} = 0. \tag{6}$$

Die Funktion von x und y_0 aber, durch welche y ausgedrückt wird, ist bisher noch unbestimmt, wir verfügen über dieselbe so, dafs

$$P\frac{\partial y}{\partial x} - Q = 0 \tag{7}$$

wird, und legen ihr überdies die Bedingung auf, dafs sie sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert. Also bestehen gleichzeitig die Relationen

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad q = q_0, \quad p = p_0,$$

wenn man zur Abkürzung

$$z_0 = f(y), \quad q_0 = f'(y_0)$$

setzt und p_0 durch die Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

bestimmt.

Die Gleichung (7) reduziert nun die Gleichung (6) auf:

$$Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

so daſs die vorgelegte Aufgabe darauf zurückgeführt ist, vier Funktionen y, z, p, q der beiden unabhängigen Variabelen x und y_0 zu finden, welche allgemein den fünf Gleichungen (1), (2), (3), (7), (8) genügen, und die sich für $x = x_0$ bezüglich auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren. Wir erwähnen dabei nicht die Gleichung (4), weil sie, wie wir gesehen haben, aus den Gleichungen (2) und (3) hervorgeht.

838. Ein Hilfssatz. Die Gleichungen (1), (2), (7), (8) genügen, wie wir zeigen werden, zur Bestimmung der Unbekannten y, z, p, q; die Gleichung (3) ist also überflüssig und muſs von selbst dann erfüllt sein. Diesen wichtigen Satz hat Cauchy folgendermaſsen bewiesen.

Wir nehmen an, daſs aus den Gleichungen (1), (2), (7), (8) für y, z, p, q bestimmte Werte gewonnen sind, Funktionen von x und y_0, welche sich für $x = x_0$ bezüglich auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren. Die beiden Seiten der Gleichung (3) sind dann ebenfalls bestimmte Funktionen von x und y_0, und indem wir mit T ihre Differenz bezeichnen, ist

$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0} + T. \tag{9}$$

Differentiiert man dieselbe nach x und subtrahiert davon die Gleichung (2), nachdem sie zuvor nach y_0 differentiiert ist, so hat man an Stelle der Gleichung (4):

$$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{10}$$

Trägt man nun in die Gleichung (5) die Werte von $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ und $\frac{\partial p}{\partial y_0}$ aus den Gleichungen (9) und (10) ein, so wird

$$\left(Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} + P\frac{\partial T}{\partial x} + ZT = 0, \tag{11}$$

und dies reduziert sich auf:

$$P\frac{\partial T}{\partial x} + TZ = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Z}{P}.$$

Da die Gröſse $-\frac{Z}{P}$ als Funktion von x und y_0 dargestellt ist, so wird, wenn das Integral

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx$$

einen endlichen und bestimmten Wert hat, hiernach:

$$(12) \qquad l\frac{T}{T_0} = -\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx, \quad T = T_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx},$$

wobei T_0 den Wert bezeichnet, welchen T für $x = x_0$ erhält. Da aber die Annahme $x = x_0$ die Gröſse $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ auf q_0 und $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ auf 1 reduziert, so lehrt die Gleichung (9), daſs

$$T_0 = 0$$

ist, und folglich ist nach Gleichung (12) allgemein:

$$T = 0.$$

Wir werden später den besonderen Fall behandeln, wo das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx$$

keinen endlichen und bestimmten Wert hat.

339. Lösung des Integrationsproblemes. Auf Grund der letzten Untersuchung haben wir nur die Gleichungen (1), (2), (7) und (8) zu betrachten. Die Gleichung (1) läſst sich nun auch durch ihre Ableitung nach x ersetzen; denn diese abgeleitete Gleichung ist nicht allgemeiner als die ursprüngliche, weil die Werte von y, z, p, q sich auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren sollen für $x = x_0$. Dieselbe wird:

$$X + Y\frac{\partial y}{\partial x} + Z\frac{\partial z}{\partial x} + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

und indem man $\frac{\partial z}{\partial x}$, Q und Y durch ihre Werte aus den Gleichungen (2), (7) und (8) ersetzt, erhält man

$$X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Das Problem, welches wir zu lösen haben, besteht also jetzt darin, vermittelst vier der Gleichungen (1), (2), (7), (8), (13) die Werte von y, z, p, q als Funktionen von x und y_0 zu bestimmen, die sich für $x = x_0$ auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren.

Die Gleichungen (2), (7), (8), (13) bilden thatsächlich ein System von vier simultanen partiellen Differentialgleichungen; da aber diese Gleichungen die unabhängige Variabele y_0 nicht enthalten, so lassen sie sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln; sie sind in der einen Formel enthalten:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq}, \tag{14}$$

und eine derselben kann, wie wir nochmals wiederholen, durch die Gleichung (1) ersetzt werden.

Ist die linke Seite der Gleichung (1) eine lineare Funktion in Bezug auf die Ableitungen p und q, so hat F die Form

$$Pp + Qq - R,$$

wobei P, Q, R Funktionen von x, y, z sind. In diesem Falle lassen die beiden ersten der in der Formel (14) enthaltenen Gleichungen, nämlich:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

für sich allein bereits die Werte von y und z als Funktionen von x und y_0 bestimmen. Sonach kommt man für lineare Gleichungen auf die Regel der Nr. 821 zurück.

840. Diskussion des Resultates. Nehmen wir allgemein an, dafs man aus den Gleichungen (14) die Werte von y, z, p, q bestimmt hat, welche sich für $x = x_0$ auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren; es seien:

$$\begin{cases} y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \\ z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \\ p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \\ q = f_4(x, y_0, z_0, q_0) \end{cases} \tag{15}$$

diese Werte; wir schreiben die Gröfse p_0 nicht in diesen Gleichungen, weil man immer annehmen kann, dafs man ihren Wert aus der Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

berechnet und substituiert hat; dagegen ist x_0 ein bestimmter numerischer Wert, der nicht weiter in Betracht kommt.

Die beiden ersten der Gleichungen (15) geben die Lösung des gestellten Problemes, wenn man z_0 durch $f(y_0)$, q_0 durch $f'(y_0)$ ersetzt. Erteilt man der Funktion $f(y_0)$ eine bestimmte Form, und kann man alsdann y_0 zwischen den beiden genannten Gleichungen eliminieren, so hat man den Ausdruck der unbekannten Funktion z in x und y. Wenn aber die Funktion $f(y_0)$ oder z_0 unbestimmt bleibt, so wird die Elimination von y_0 unmöglich, aufser wenn die Werte von y und z beide unabhängig von q_0 sind. Im letzteren Falle ist, wenn man die beiden ersten Gleichungen (15) nach y_0 und z_0 auflöst:

$$y_0 = \varphi(x, y, z), \quad z_0 = \psi(x, y, z),$$

und die Lösung des Problemes wird durch die Gleichung

$$\psi = f(\varphi)$$

gegeben; hieraus kann man schliefsen, dafs alsdann die vorgelegte Differentialgleichung notwendig in Bezug auf die Ableitungen p und q linear sein mufs (Nr. 88).

Sieht man von dem Falle der linearen Gleichung ab, so kann keiner der Ausdrücke für y und z unabhängig von q_0 sein. Denn trägt man in die Gleichung (3) die Werte von y, z, q ein, welche aus den Gleichungen (15) gewonnen werden, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \frac{\partial f_2}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_2}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) - f_4\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) = 0.$$

Diese Gleichung mufs eine Identität sein, und folglich müssen sich die mit $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$ multiplizierten Terme gegenseitig aufheben. Also mufs identisch:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_0} - f_4 \frac{\partial f_1}{\partial q_0} = 0$$

sein. Da nun der Faktor $f_4 = q$ nicht im allgemeinen null sein kann, so folgt, dafs, wenn eine der Gröfsen $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$, $\frac{\partial f_2}{\partial q_0}$ identisch null ist, auch die andere identisch verschwindet; folglich enthalten die Funktionen f_1 und f_2 entweder beide die Gröfse q_0 oder sie sind beide von q_0 unabhängig; dieser letztere Fall tritt aber, wie wir eben sahen, nur bei den linearen Gleichungen ein.

Wenn man nun q_0 zwischen den beiden ersten Gleichungen (15) eliminiert, so erhält man eine Gleichung, welche an Stelle der zweiten treten kann und die wir mit

$$V(x, y, z, y_0, z_0) = 0 \quad \text{oder} \quad V = 0 \tag{16}$$

bezeichnen wollen. Bildet man das totale Differential derselben, und ersetzt man dabei dz_0 durch $q_0 dy_0$, dz durch

$$p\,dx + q\,dy,$$

so folgt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0}\right)dy_0 = 0.$$

Aber die erste der Gleichungen (15) ergiebt:

$$dy = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0}q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right)dy_0;$$

wird dieser Wert von dy in die vorhergehende Gleichung eingetragen, so bleiben nur die beiden unabhängigen Differentiale dx und dy_0 nach; setzt man also die Koeffizienten derselben null, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0}q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen müssen identisch erfüllt sein, wenn man y, z, p, q durch ihre Werte aus den Gleichungen (15) ersetzt. Diese enthalten aber die willkürliche Gröfse $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$ nicht; folglich mufs diese aus der letzten Gleichung verschwinden. Wenn wir also von dem Fall absehen, dafs die ursprüngliche Differentialgleichung linear ist, so wird $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$

nicht null; also mufs

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$$

verschwinden, und sonach ergeben die Gleichungen das simultane System:

$$(17) \qquad \frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial V}{\partial z_0} = 0$$

und

$$(18) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Also werden die vier Gleichungen (16), (17) und (18) durch die Gleichungen (15) identisch erfüllt; sie bestimmen andererseits die Werte von $y, z, p, q,$ und folglich können sie die Gleichungen (15) vertreten.

Ersetzt man insbesondere in der Funktion V, z_0 durch $f(y_0)$, so wird das gesuchte Integral der partiellen Differentialgleichung (1) das Resultat der Elimination von y_0 zwischen den beiden Gleichungen:

$$(19) \qquad V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right) = 0;$$

$\left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right)$ bezeichnet die Ableitung von V nach y_0, wenn dabei z_0 als Funktion von y_0 angesehen wird. Um also dieses Integral zu erhalten, genügt es, die Funktion V zu kennen, und man erhält dasselbe, indem man die Gröfsen p, q, p_0, q_0 zwischen den vier Integralen der Gleichungen (14) und der Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

eliminiert.

Wir haben hierbei noch zu bemerken, dafs die Gleichung

$$V = 0$$

ein vollständiges Integral der Gleichung (1) darstellt, wenn man y_0 und z_0 als zwei willkürliche Konstanten betrachtet. Denn aus der allgemeinen Lösung, welche wir entwickelt haben, kann man umgekehrt die partielle Differentialgleichung ableiten, indem man y_0 und z_0 zwischen den Gleichungen (16) und (18) eliminiert. Anstatt nun die Gröfsen y_0 und z_0 als Variabele zu betrachten, welche die Gleichung (17) befriedigen, kann man dieselben auch als Konstanten ansehen, und es ist

klar, daſs dabei die Gleichungen (18) bestehen bleiben, und bei der Elimination von y_0 und z_0 immer noch auf die Gleichung (1) zurückführen. Die Gleichung (16), welche also zwei willkürliche Konstanten enthält, ist demnach ein vollständiges Integral der Gleichung (1).

341. Beispiel. Um eine Anwendung der vorstehenden Theorie zu geben, betrachten wir die Gleichung:

$$z - apq = 0,$$

wobei a eine Konstante bedeutet. Hier ist:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 1,$$

$$P = -aq, \quad Q = -ap, \quad Pp + Qq = -2apq = -2z,$$

und die zu integrierenden simultanen Gleichungen sind also:

$$\frac{dx}{aq} = \frac{dy}{ap} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q};$$

man findet hieraus unmittelbar die vier Integrale:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z_0}}, \quad \frac{x - x_0}{aq_0} = \frac{y - y_0}{ap_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0}},$$

und man kann p_0 und q_0 zwischen den beiden letzten Gleichungen mit einmal eliminieren, wenn man die Gleichung

$$z_0 - ap_0q_0 = 0$$

benutzt; es ist:

$$\frac{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})^2}{z_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a^2 p_0 q_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a z_0}.$$

Setzt man also:

$$V = a\,[\sqrt{z} - \sqrt{f(y_0)}]^2 - (x - x_0)(y - y_0),$$

so ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$z - apq = 0$$

das Resultat der Elimination von y_0 zwischen den Gleichungen:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = 0.$$

842. Der geometrische Inhalt der Integrationsmethode. Indem wir, ebenso wie in Nr. 823 die Gröfsen p, q als Koordinaten einer Ebene ansehen, welche durch den Punkt x, y, z hindurchgeht, und jeden Punkt des Raumes mit einer durch ihn gehenden Ebene als Element betrachten, erkennen wir, dafs durch eine partielle Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

vierfach unendlich viele Elemente bestimmt werden. Erteilt man den Punktkoordinaten bestimmte Werte, so bilden die zu diesem Punkte gehörigen Ebenen ein einfach unendliches System, welches bei der linearen Gleichung ein lineares Ebenenbüschel ist, bei der allgemeinen Gleichung dagegen eine Kegelfläche umhüllt, deren Spitze der betrachtete Punkt ist. Sonach hat man sich in jedem Punkte des Raumes einen von Ebenen umhüllten Kegel zu denken. Unter einem Integrale der partiellen Differentialgleichung versteht man nun jede Fläche, welche die Eigenschaft hat, dafs in jedem Punkte der Fläche die Tangentenebene dem zugeordneten Kegel angehört, oder also, dafs sich in jedem Punkte die Fläche mit dem zugeordneten Kegel berührt. Hieraus erkennt man sofort zweierlei. *Erstlich*: Um sämtliche Elemente der Differentialgleichung in Flächen geordnet zu umfassen, ist im allgemeinen ein zweifach unendliches Flächensystem notwendig und hinreichend, denn auf jeder Fläche liegen zweifach unendlich viele Elemente. Dieses Flächensystem bildet daher ein *vollständiges Integral*. *Zweitens:* Jede Integralfläche hat die Eigenschaft, dafs von jedem ihrer Punkte eine Richtung ausgeht, die in der Tangentenebene liegt, und zugleich eine Kante des dem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordneten Kegels bildet.

Wir wollen nun zunächst die Gleichungen der zu einem Punkte x, y, z gehörigen Fortschreitungsrichtungen, d. h. die Erzeugenden des zugehörigen Kegels entwickeln. Da jede dieser Linien definiert wird durch den Schnitt einer Ebene p, q mit der benachbarten

$$p + \delta p, \quad q + \delta q,$$

so mufs, wenn wir mit dx, dy, dz die Koordinaten der Richtung bezeichnen:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sein, und auch:

$$dz = (p + \delta p)\,dx + (q + \delta q)\,dy, \quad \text{also:} \quad \delta p\,dx + \delta q\,dy = 0.$$

Da nun

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

und

$$f(x, y, z, p + \delta p, q + \delta q) = 0$$

ist, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q = 0$$

oder in unserer früheren Bezeichnung:

$$P\delta p + Q\delta q = 0.$$

Sonach wird:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{P}{Q},$$

d. h.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq}.$$

Indem man in solch einer Richtung auf irgend einer Integralfläche fortgeht, erleidet die zugehörige Tangentenebene eine ganz bestimmte Änderung, deren Gröfse dp, dq folgendermafsen zu bestimmen ist.

Denkt man sich z und folglich auch p und q als Funktionen von x und y so definiert, dafs bei allen Werten dieser Variabelen die partielle Differentialgleichung erfüllt ist, so müssen, wenn wir für die partiellen Ableitungen von f die früheren Bezeichnungen wählen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X$$

u. s. w., die Gleichungen bestehen:

$$X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$Y + Zq + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial q}{d x} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

und wenn wir in der vorgeschriebenen Richtung vorgehen, wird:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = P\frac{dp}{dx}, \quad P\frac{\partial q}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = P\frac{dq}{dx}.$$

Demnach erhalten die beiden obigen Gleichungen die Form:

$$(X + Zp) + P\frac{dp}{dx} = 0, \quad (Y + Zq) + P\frac{dq}{dx} = 0,$$

und sonach sind wir für die Fortschreitung längs einer Erzeugenden des Kegels auf das System (s. Gleichung 14) geführt:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq},$$

und zugleich ist der Satz bewiesen: *Alle Integralflächen, welche in einem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangentenebene haben, berühren sich längs einer von diesem Punkte ausgehenden Kurve, denn das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebene ändert, wenn man in derselben längs der Erzeugenden des zugehörigen Kegels fortschreitet, ist für alle Integralflächen das nämliche.*

Sonach bestimmen die von jedem Punkte des Raumes ausgehenden, einfach unendlich vielen Fortschreitungseinrichtungen eines Kegels ein System von dreifach unendlich vielen räumlichen Kurven, oder besser ein System von *charakteristischen Streifen,* indem zu jeder Raumkurve zugleich ein bestimmtes System von Tangentenebenen gehört; jede Integralfläche hat die Eigenschaft, dafs auf derselben ein einfach unendliches System dieser charakteristischen Streifen gelegen ist, und dafs die Tangentenebenen der Fläche in den Punkten solch eines Streifens mit den Ebenen, welche demselben zugeordnet sind, zusammenfallen. Ein charakteristischer Streifen ist durch sein Anfangselement bestimmt. Die Gleichungen derselben werden durch Integration des obigen Systemes erhalten, das, weil die Bedingung

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

erfüllt ist, vollständig integriert auf vier Gleichungen mit drei willkürlichen Konstanten führt, welche wir in der Form

$$y = f_1(x, C_1, C_2, C_3),$$
$$z = f_2(x, C_1, C_2, C_3),$$
$$p = f_3(x, C_1, C_2, C_3),$$
$$q = f_4(x, C_1, C_2, C_3)$$

voraussetzen können. Die beiden ersten derselben bestimmen die Kurven, die beiden anderen die zugehörigen Tangentenebenen.

Man darf nun aber hieraus nicht schliefsen, dafs es im allgemeinen genügt, aus dem dreifach unendlichen Kurvensysteme ein einfach unendliches, welches eine Fläche bestimmt, herauszugreifen, um auf diese Weise eine Integralfläche zu bilden; es mufs vielmehr die Bedingung erfüllt sein, dafs die Tangentenebene der Fläche in jedem Punkte einer solchen Kurve auch die Koordinatenwerte p und q erhält. Ein einfach unendliches System von Kurven ergiebt sich, wenn man zwischen den willkürlichen Konstanten C_1, C_2, C_3 zwei willkürliche Relationen einführt,

$$C_2 = \varphi_1(C_1), \quad C_3 = \varphi_2(C_1),$$

und alsdann aus den beiden Gleichungen

$$y = f_1(x, C_1, \varphi_1, \varphi_2), \quad z = f_2(x, C_1, \varphi_1, \varphi_2)$$

die Gröfse C eliminiert. Für solch eine Fläche werden die Koordinaten π, $\varkappa$ der Tangentenebene aus den Gleichungen bestimmt:

$$\pi = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{df_2}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \varkappa = \frac{df_2}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial y},$$

und es ist:

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{df_1}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad 1 = \frac{df_1}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial y},$$

also:

$$\pi\frac{df_1}{dC_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{df_1}{dC_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{df_2}{dC_1}, \quad \varkappa\frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1}.$$

Wenn nun π und $\varkappa$ die Werte $p = f_3$, $q = f_4$ haben sollen, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$\left(f_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\frac{df_1}{dC_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{df_2}{dC_1}, \quad f_4\frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1}.$$

Dividiert man dieselben, so folgt:

$$f_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x} = -f_4 \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x},$$

und diese Gleichung ist in der That erfüllt, weil die Funktionen f Integrale des Systemes sind (s. auch Gleichung 2 in Nr. 837); mithin reduzieren sich die beiden Bedingungsgleichungen für die Funktionen

$$C_2 = \varphi_1(C_1), \quad C_3 = \varphi_2(C_1)$$

auf die eine Gleichung

$$f_4 \frac{d f_1}{d C_1} = \frac{d f_2}{d C_1},$$

oder

$$f_4\left(\frac{\partial f_1}{\partial C_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dC_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dC_1}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial C_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dC_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dC_1}$$

und dies ist in etwas anderer Form die Gleichung (3) in Nr. 837:

$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

Dieser Bedingungsgleichung wird nun bei der Cauchyschen Integrationsmethode in der That dadurch genügt, dafs man für $x = x_0$, also in einer bestimmten Ebene, eine willkürliche Kurve $z_0 = f(y_0)$ annimmt, und alle die charakteristischen Streifen zu einer Fläche vereinigt, welche von den Punkten dieser Kurve ausgehen, und deren zugehörige Ebenen durch die Tangenten der Kurve gehen. Denn auf diese Weise führt man zwischen den Konstanten C_1, C_2, C_3 die Bedingungen ein:

$$\begin{aligned}
y_0 &= f_1(x_0, C_1, C_2, C_3),\\
z_0 &= f_2(x_0, C_1, C_2, C_3) = f(y_0),\\
p_0 &= f_3(x_0, C_1, C_2, C_3),\\
q_0 &= f_4(x_0, C_1, C_2, C_3) = f'(y_0),
\end{aligned}$$

und es ist also wie erforderlich:

$$f_4\frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1} = f'(y_0)\frac{dy_0}{dC_1}$$

für den Wert $x = x_0$. Es ist nun aber zu zeigen, dafs diese Gleichung bei allen Werten von x fortbesteht, nachdem sie bei $x = x_0$ erfüllt ist, und dazu ist der Beweis in Nr. 838 geführt.

In unserer gegenwärtigen Bezeichnung können wir denselben folgendermaßen formulieren. Es soll bewiesen werden, daß die Differenz

$$f_4 \frac{df_1}{dC_1} - \frac{df_2}{dC_1} = T,$$

welche für $x = x_0$ den Wert $T = 0$ hat, von x ganz unabhängig ist. Es wird:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{df_1}{dC_1} + f_4 \frac{d^2 f_1}{\partial x\, dC_1} - \frac{d^2 f_2}{\partial x\, dC_1}$$

oder, weil

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}$$

ist:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{dy}{dC_1} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dq}{dC_1}\right) - \frac{dp}{dC_1}.$$

Da nun die partielle Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

bei allen Werten von C_1 erfüllt ist, so ist auch:

$$Y\frac{dy}{dC_1} + Z\frac{dz}{dC_1} + P\frac{dp}{dC_1} + Q\frac{dq}{dC_1} = 0$$

oder wenn man für $\frac{dz}{dC_1}$ den Wert $q\frac{dy}{dC_1} - T$ einsetzt:

$$(Y + Zq)\frac{dy_1}{dC_1} - ZT + P\frac{dp}{dC_1} + Q\frac{dq}{dC_1} = 0.$$

Entnimmt man hieraus den Wert von $\frac{dp}{dC_1}$ und substituiert denselben in die obige Gleichung, so folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{ZT}{P} + \frac{dy}{dC_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{Y + Zq}{P}\right) + \frac{dq}{dC_1}\left(\frac{Q}{P} - \frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Die in den beiden letzten Klammern enthaltenen Ausdrücke verschwinden, und demnach wird, wie früher:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Z}{P}, \quad \text{also} \quad T = T_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx},$$

vorausgesetzt, daß das Integral einen bestimmten endlichen Wert hat; nun ist T_0 gleich null, also ist auch $T = 0$ bei allen Werten von x.

Vereinigt man alle charakteristischen Streifen, welche von einem bestimmten Punkte ausgehen, der in der Ebene $x = x_0$

liegt und dort die Koordinaten y_0, z_0 hat, so sind die Gröfsen C_1, C_2, C_3 aus den vier Gleichungen

$$y = f_1(x, C_1, C_2, C_3), \quad z = f_2(x, C_1, C_2, C_3),$$
$$y_0 = f_1(x_0, C_1, C_2, C_3), \quad z_0 = f_2(x_0, C_1, C_2, C_3)$$

zu eliminieren. Es ergiebt sich eine Fläche, in deren Gleichung, abgesehen von der Konstante x_0, noch die willkürlichen Gröfsen y_0 und z_0 auftreten, also ein zweifach unendliches Flächensystem:

$$V(x, y, z, y_0, z_0) = 0.$$

Für jede in diesem Systeme enthaltene Fläche sind die beiden notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt; denn es ist auch hier:

$$f_4 \frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1}$$

für $x = x_0$, weil $\frac{df_1}{dC_1}$ und $\frac{df_2}{dC_1}$ beide gleich null sind.

843. Das Integral $\int \frac{Z}{P} dx$.

Die entwickelte Methode setzt voraus, dafs das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx$$

einen endlichen und bestimmten Wert behält; mit diesem Integrale wollen wir uns nun näher beschäftigen. Wir nehmen der Kürze wegen an, dafs die Gleichung (16) nach z aufgelöst ist und dafs man aus ihr den Wert $z = M$ gewonnen hat, wobei M eine gegebene Funktion von x, y, y_0, z_0 ist. Die Gleichungen (16) und (17), welche die gesuchte Lösung der Gleichung (1) darstellen, sind dann einfacher:

$$z = M, \tag{20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial M}{\partial z_0} = 0, \tag{21}$$

und die Gleichungen (18), welche die Werte von p und q bestimmen, werden:

$$(22) \qquad p = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Um die ursprüngliche Differentialgleichung zu rekonstruieren, mufs man y_0 und z_0 aus den Gleichungen (20) und (22) eliminieren; folglich wird das totale Differential dF der linken Seite dieser Gleichung erhalten, wenn man die totalen Differentiale der Funktionen

$$M - z, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - p, \quad \frac{\partial M}{\partial y} - q$$

addiert, nachdem man dieselben bezüglich mit den Faktoren λ, μ, ν multipliziert hat, welche so bestimmt sind, dafs die Differentiale dy_0 und dz_0 verschwinden; dieselben sind hier als unabhängig zu betrachten. Man hat also:

$$(23) \quad \begin{cases} dF = \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}\right) dx \\ \qquad + \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) dy - \lambda dz - \mu dp - \nu dq, \end{cases}$$

und die Faktoren λ, μ, ν müssen die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$(24) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial M}{\partial y_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} = 0, \\ \lambda \frac{\partial M}{\partial z_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} = 0. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (23) folgt:

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{\lambda}{\mu},$$

und wegen der Gleichungen (24) wird:

$$-\frac{Z}{P} = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}}.$$

Um das Integral, welches wir zu untersuchen haben, zu gewinnen, mufs man in diesem Ausdruck y durch seinen Wert aus der Gleichung (21) ersetzen, ferner mit dx multiplizieren, und zwischen den Grenzen x_0 und x integrieren. Man kann

aber die Elimination von y vermeiden, wenn man folgendermaſsen verfährt. Addiert man zum Zähler des obigen Ausdruckes für $-\frac{Z}{P}$ die Gröſse

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}}\,\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}$$

und subtrahiert dieselbe wiederum, so erhält man:

$$-\frac{Z}{P}dx = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}\right)dx + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}\right)dx}{\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}\right)}.$$

Wenn man nun, unter der Annahme, daſs x und y die einzigen Variabelen sind, die Gleichung (21) in der Form:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} + q_0 = 0$$

differentiiert, so findet man:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}\right)dx = \left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}\right)dy,$$

und dadurch reduziert sich der vorstehende Ausdruck für $-\frac{Z}{P}$ auf:

$$-\frac{Z}{P}dx = \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial x}dx + \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial y}dy = d \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

Da die Funktion M für $x = x_0$ und $y = y_0$ gleich z_0 wird, so folgt, daſs bei der nämlichen Annahme $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ gleich eins wird. Integriert man also die obige Gleichung zwischen den Grenzen x_0 und x, so ist

$$(25) \qquad -\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}dx = \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

844. Fall, dafs das fragliche Integral nicht regulär ist. Die Behauptung in Nr. 838 gilt nicht mehr, wenn das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$$

keinen endlichen und bestimmten Wert hat. Wie Herr Bertrand bemerkt hat, trifft dieses nicht nur in einigen besonderen Fällen, sondern auch in ganz allgemeinen ein. In der That, es genügt, der Funktion $f(y)$ oder $f(y_0)$ oder z_0 allgemein solch eine Form beizulegen, dafs das Integral, um welches es sich handelt, unendlich wird. Indessen läfst sich beweisen:

Wenn für eine besondere Form der Funktion $f(y)$ das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$$

keinen endlichen und bestimmten Wert mehr hat, so werden die Gleichungen, welche wir entwickelt haben, illusorisch und liefern nicht mehr eine Lösung der vorgelegten Aufgabe. Diese wird alsdann durch das vollständige Integral von Lagrange gegeben, welches mit dem allgemeinen Integrale verbunden ist.

Denn man erkennt aus der Gleichung (25): Hat das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$$

keinen endlichen und bestimmten Wert mehr für eine bestimmte Form der Funktion $f(y)$, so wird die partielle Ableitung $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ entweder null oder unendlich oder unbestimmt nach der Substitution des Wertes von y, welcher aus der Gleichung (21) entnommen wird. Dann aber ist evident, dafs man aus der Gleichung (21) keinen bestimmten Wert von y entnehmen kann, welcher sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert, weil bei der Annahme $y = x_0$ und $y = y_0$ die Ableitung $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ sich auf den Wert eins reduzieren müfste. Die Unmöglichkeit, einen be-

stimmten Wert von y aus der Gleichung (21) zu berechnen, der sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert, läſst schlieſsen, daſs bei der Annahme $x = x_0$ die Variabele y aus der linken Seite dieser Gleichung verschwindet, und weil diese erfüllt ist, wenn man zugleich $x = x_0$ und $y = y_0$ setzt, so ist evident, daſs sie identisch erfüllt ist bei allen Werten von y, wenn man $x = x_0$ setzt. Hieraus folgt, daſs y_0 aus der Gleichung (20) verschwindet, wenn man $x = x_0$ setzt, denn die Ableitung der linken Seite nach y_0 ist identisch null. Diese Gleichung giebt also bei der Annahme $x = x_0$:

$$z = f(y),$$

weil, wie wir wissen, dieselbe identisch statt hat, wenn man

$$y = y_0, \quad z = z_0$$

setzt und weil

$$z_0 = f(y_0)$$

ist. Wir schlieſsen also, daſs in dem besonderen Fall, mit welchem wir uns beschäftigen, die Lösung des Problemes nicht mehr durch das System der Gleichungen (20) und (21), sondern allein durch die Gleichung (20) gegeben ist.

Geometrisch bedeutet die Gleichung $z = M$ ein zweifach unendliches Flächensystem, wenn die Gröſsen y_0 und z_0 als variabele Parameter betrachtet werden. In der Ebene $x = x_0$ liefert dieses Flächensystem im allgemeinen ein zweifach unendliches Kurvensystem. Indem man nun die Relation

$$z_0 = f(y_0)$$

einführt, hebt man aus diesem Kurvensysteme ein einfach unendliches heraus, und die Gleichung (21) liefert zusammen mit der Gleichung (20) die Einhüllende dieses Systemes, von welcher die charakteristischen Streifen ausgehen, welche eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung zusammensetzen. Wird nun bei der Substitution

$$z_0 = f(y_0)$$

die Gleichung $z = M$ unabhängig von y_0, so heiſst dies, daſs sämtliche Flächen, welche aus dieser Relation hervorgehen, sich in der nämlichen der Ebene $x = x_0$ angehörigen Kurve

schneiden. Jede Fläche $z = M$, welche durch diese Kurve geht, bildet alsdann eine Lösung der Differentialgleichung.

845. Beispiel. Wir wollen diese Darlegungen an einem Beispiele erläutern. Es sei gegeben die Gleichung

$$F = pz - pqy - aq = 0,$$

wobei a eine Konstante bedeutet. Hier ist

$$X = 0, \quad Y = -pq, \quad Z = p,$$

$$P = z - qy = \frac{aq}{p}, \quad Q = -py - a = -\frac{pz}{q}.$$

Das simultane System wird demnach:

$$-\frac{p\,dx}{aq} = \frac{q\,dy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$

und hieraus findet man ohne Schwierigkeit:

$$q = q_0, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_0^2} + \frac{2(x - x_0)}{aq_0},$$

$$\frac{z}{p} = \frac{z_0}{p_0} + (x - x_0), \quad \frac{y}{p} = \frac{y_0}{p_0} - \frac{x - x_0}{q_0},$$

also wenn man p_0 durch seinen Wert

$$\frac{aq_0}{z_0 - q_0 y_0}$$

ersetzt:

$$y = \frac{y_0(z_0 - q_0 y_0) - a(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$z = \frac{z_0(z_0 - q_0 y_0) + aq_0(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$p = \frac{aq_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$q = q_0.$$

Dies sind die Werte von y, z, p, q als Funktionen von x, y_0, z_0, q_0. Nun ist:

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{p^2}{aq} = -\frac{aq_0}{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}$$

und

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx = \log \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}}.$$

Man sieht hieraus, dafs das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$$

unendlich wird, wenn man

$$z_0 - q_0 y_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dz_0}{dy_0} = \frac{z_0}{y_0}$$

setzt; in diesem Falle ist der Wert von z_0:

$$z_0 = \alpha y_0, \quad \text{also} \quad q_0 = \alpha,$$

wenn α eine willkürliche Konstante bedeutet. Wenn man aber für z_0 diesen Wert annimmt, so werden unsere Gleichungen illusorisch, denn sie geben für y und z die Werte:

$$y = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}(x - x_0)}, \quad z = \sqrt{\frac{a\alpha}{2}(x - x_0)},$$

und diese sind unabhängig von y_0.

Wir eliminieren nun q_0 zwischen den beiden Gleichungen, welche die Werte von y und z bestimmen; man erhält aus diesen Gleichungen:

$$z + q_0 y = \frac{z_0^2 - q_0^2 y_0^2}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$z - q_0 y = \sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)},$$

und durch Multiplikation:

$$z^2 - q_0^2 y^2 = z_0^2 - q_0^2 y_0^2 \quad \text{oder} \quad z^2 - z_0^2 = q_0^2(y^2 - y_0^2);$$

vermittelst derselben reduziert sich die zweite Gleichung, ins Quadrat erhoben, auf:

$$q_0(y^2 - y_0^2) = (yz - y_0 z_0) + a(x - x_0).$$

Die Elimination von q_0 zwischen diesen beiden letzten Gleichungen läfst sich unmittelbar ausführen, und man erhält:

$$(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2) - [(yz - y_0 z_0) + a(x - x_0)]^2 = 0$$

oder

$$z^2 - 2\left[z_0 - \frac{a(x - x_0)}{y_0}\right]\frac{y}{y_0} z + \frac{y^2}{y_0^2} z_0^2 - \frac{2a(x - x_0)}{y_0} z_0 + \frac{a^2(x - x_0)^2}{y_0^2} = 0;$$

dies ist die Gleichung, welche wir allgemein mit $V = 0$ bezeichnet haben. Aus derselben folgt:

$$z = \left[z_0 - \frac{a(x - x_0)}{y_0}\right]\frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right)\left(2az_0 - a^2\frac{x - x_0}{y_0}\right)},$$

eine Formel, deren rechte Seite die mit M bezeichnete Gröſse ist. Man kann nun leicht verifizieren, daſs die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial M}{\partial z_0} = 0$$

den oben für y erhaltenen Wert liefert, und wenn man denselben in den Ausdruck für $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ substituiert, so findet man:

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

was mit den allgemeinen Ergebnissen unserer Theorie übereinstimmt.

Setzt man nun $z_0 = \alpha y_0$ in die Gleichung $z = M$, so erhält man:

$$z = \left[\alpha - \frac{a(x - x_0)}{y_0^2}\right]y + \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right)\left(2a\alpha y_0 - a^2\frac{x - x_0}{y_0}\right)}.$$

Dieser Wert von z genügt der vorgelegten Gleichung, wenn man α und y_0 als willkürliche Konstanten betrachtet; andererseits reduziert er sich auf

$$z = \alpha y$$

für $x = x_0$. Er liefert also die Lösung des vorgelegten Problemes für den Fall, daſs man die Funktion $f(y)$ gleich αy annimmt.

§ 5. Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen Veränderlichen.

846. Umformung des Problemes. Die vorige Methode ist anwendbar, wie groſs auch die Zahl der Variabelen sein mag; dies wollen wir im folgenden nachweisen, ohne dabei auf eine Diskussion von Einzelheiten einzugehen.

Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \dots x_n$ die n unabhängigen Variabelen, mit x die abhängige; ferner setzen wir:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n \tag{1}$$

und betrachten die partielle Differentialgleichung

$$F(x, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0, \tag{2}$$

deren linke Seite eine gegebene Funktion der $2n+1$ Variabelen

$$x, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n$$

ist. Die unbekannte Funktion x ist nicht vollständig bestimmt durch die Bedingung, daſs sie der Gleichung (2) genügen soll; sie wird dies aber im allgemeinen (Nr. 835), wenn man auſserdem verlangt, daſs sie sich auf eine gegebene Funktion

$$\xi = f(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$$

der $n-1$ Variabelen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ reduziert, wenn man der Variabelen x_n den besonderen Wert ξ_n beilegt. Setzt man also:

$$d\xi = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \cdots + \omega_{n-1} dx_{n-1},$$

so muſs für $x_n = \xi_n$ nicht nur $x = \xi$, sondern auch

$$p_1 = \omega_1, \quad p_2 = \omega_2, \dots p_{n-1} = \omega_{n-1}$$

sein. Dies festgesetzt, bezeichnen wir mit

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$$

unbestimmte Funktionen von

$$x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n;$$

man kann dann umgekehrt auch

$$x_1, x_2, \dots x_{n-1}$$

als Funktionen von

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, x_n$$

betrachten, und folglich wird auch x eine Funktion der nämlichen Variabelen. Die Gleichung (1) läſst die partiellen Ableitungen von x bei dieser Annahme berechnen; denn es ist:

$$\frac{\partial x}{\partial x_n} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + p_n \tag{3}$$

und

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \cdots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_2} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \cdots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_{n-1}} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}. \end{cases}$$

Differentiiert man die Gleichung (3) nach ξ_i und die i^{te} Gleichung (4) nach x_n und subtrahiert sodann die beiden erhaltenen Gleichungen, so wird:

$$(5)\quad \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right)$$

oder kürzer:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial x_n}\right).$$

Da der Index i die Werte $1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann, so vertritt die Gleichung (5) ein System von $n-1$ verschiedenen Gleichungen. Wir bezeichnen nun mit

$$dF = X dx + X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n + P_1 dp_1 + \cdots + P_n dp_n$$

das totale Differential der linken Seite der Gleichung (2); alsdann wird, wenn man die Gleichung (2) nach ξ_i differentiiert:

$$X\frac{\partial x}{\partial \xi_i} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + X_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \cdots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = 0$$

oder, wenn man $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ und $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen (4) und (5) ersetzt:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\left(X_1 + X p_1 + P_n \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(X_{n-1} + X p_{n-1} + P_n \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\left(P_1 - P_n \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(P_{n-1} - P_n \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0, \end{cases}$$

und diese Formel repräsentiert $n-1$ Gleichungen, indem der Index i die Werte von $1, 2, \ldots n-1$ erhalten kann.

Da nun aber die Funktionen von x_n, ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_{n-1}$, welche die Werte von x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ darstellen, bisher noch unbestimmt sind, so setzen wir fest, daſs dieselben den $n-1$ Gleichungen

$$(7) \qquad P_1 - P_n \frac{\partial x_1}{\partial x_n} = 0, \ldots, P_{n-1} - P_n \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

genügen und sich überdies für $x_n = \xi_n$ auf ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ bezüglich reduzieren sollen, derart, daſs für $x_n = \xi_n$ die Gleichungen bestehen:

$$x = \xi, \quad x_1 = \xi_1, \ldots x_{n-1} = \xi_{n-1}, \quad p_1 = \omega_1, \ldots p_{n-1} = \omega_{n-1}$$

und auch

$$p_n = \omega_n,$$

wobei der Wert von ω_n durch die Gleichung

$$F(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = 0$$

bestimmt ist. Die Gleichungen (7) reduzieren die $n-1$ Gleichungen (6) auf:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\left(X_1 + X p_1 + P_n \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(X_{n-1} + X p_{n-1} + P_n \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0,$$

und diese können nicht anders erfüllt sein als dadurch, daſs man setzt:

$$(8) \qquad \begin{cases} X_1 + X p_1 + P_n \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} = 0, \\ X_2 + X p_2 + P_n \dfrac{\partial p_2}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n-1} + X p_{n-1} + P_n \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

weil die Determinante D, gebildet mit den $(n-1)^2$ Gröſsen:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, & \ldots \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, & \ldots \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}, \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_{n-1}}, & \ldots \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}, \end{matrix}$$

nicht null sein kann zufolge der Unabhängigkeit der Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$. Denn es ist:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} d\xi_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dx_{n-1} = \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} d\xi_{n-1},$$

und wenn die Determinante D null wäre, so könnte man durch Elimination der Differentiale $d\xi_1, d\xi_2, \ldots d\xi_{n-1}$ eine oder mehrere Gleichungen von der Form

$$M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \cdots + M_n dx_n = 0$$

bilden; dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn eine Relation zwischen den Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ existiert. Da diese unabhängig voneinander sind, so kann D nicht verschwinden, und folglich müssen die Gleichungen (8) bestehen.

Demnach ist das Problem darauf zurückgeführt, $2n$ Funktionen

$$x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \quad p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$$

der n Variabelen

$$x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$$

zu finden, welche den $3n-1$ Gleichungen (2), (3), (4), (7), (8) genügen, und sich für $x = x_n$ bezüglich auf

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n$$

reduzieren.

847. Ein Hilfssatz. Es genügen aber die $2n$ Gleichungen (2), (3), (7), (8) zur Bestimmung der $2n$ Funktionen; es mufs also gezeigt werden, dafs die Gleichungen (4) von selbst erfüllt sind, und dies gelingt, indem man die in Nr. 838 befolgte Methode hier wiederholt. Wir nehmen also an, dafs man aus den Gleichungen (2), (3), (7), (8) die Werte von

$$x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \quad p_1, p_2, \ldots p_n$$

als Funktionen von

$$x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$$

bestimmt hat, die sich für $x_n = \xi_n$ auf

$$\xi, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

reduzieren. Bezeichnen wir dann mit $T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ die Differenzen zwischen den beiden Seiten der bezüglichen Gleichungen des Systemes (4), so dafs

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + T_i$$

ist, so folgt, indem man diese Gleichung nach x_n differentiiert und davon die Gleichung (3), differentiiert nach ξ_i, subtrahiert:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{=n} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial T_i}{\partial x_n}.$$

Wendet man die obigen Werte von $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ und $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ an Stelle der durch die Gleichungen (4) und (5) gelieferten an, so entsteht eine Gleichung, die sich von der Gleichung (6) nur dadurch unterscheidet, dafs ihre linke Seite die neuen Terme

$$X T_i + P_n \frac{\partial T_i}{\partial x_n}$$

enthält, und da alle übrigen Terme infolge der Gleichungen (7) und (8) verschwinden, so erhält man:

$$X T_i + P_n \frac{\partial T_i}{\partial x_n} = 0,$$

wobei der Index i die $n-1$ Werte $1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann. Hieraus folgt:

$$T_i = \theta_i e^{-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n},$$

wenn man mit θ_i den Wert bezeichnet, welchen T_i für $x_n = \xi_n$ erhält. Man erkennt nun unmittelbar, dafs θ_i null ist, und folglich ist auch

$$T_i = 0,$$

wenn das Integral

$$\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n$$

einen endlichen und bestimmten Wert hat. Für die Diskussion der Fälle, wo dieses Integral unendlich oder bestimmt wird,

verweise ich den Leser auf die in den Bemerkungen zu Nr. 837 citierten Abhandlungen.

848. Lösung des Integrationsproblemes. Nach dem Vorstehenden genügt es, die $2n$ Gleichungen (2), (3), (7) und (8) zu betrachten. Man kann die erste derselben auch durch ihr Differential in Bezug auf x_n ersetzen, nämlich:

$$X\frac{\partial x}{\partial x_n}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}+X_n+P_1\frac{\partial p_1}{\partial x_n}+\cdots+P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0,$$

weil das vorgelegte Problem keine Unbestimmtheit mehr enthält. Indem man hierbei $\frac{\partial x}{\partial x_n}$ durch seinen Wert aus der Gleichung (3) ersetzt, und ferner

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_n},\ldots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\quad\text{und}\quad\frac{\partial p_1}{\partial x_n},\ldots\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$$

durch ihre Werte aus den Gleichungen (7) und (8), so folgt:

$$X_n+Xp_n+P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0. \tag{9}$$

Demnach sind wir dazu gelangt, vermittelst der $2n$ Gleichungen (3), (7), (8) und (9) die Werte von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\quad p_1,\ p_2,\ldots p_n$$

zu bestimmen, die sich für $x_n=\xi_n$ bezüglich auf

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots\xi_{n-1},\quad \omega_1,\ \omega_2,\ldots\omega_n$$

reduzieren.

Die Gleichungen, um die es sich handelt, sind ihrem Wesen nach partielle Differentialgleichungen. Da sie aber die Variabelen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ nicht enthalten, so lassen sie sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. Man kann sie in einer Formel zusammenfassen, nämlich:

$$\tag{10}\left\{\begin{aligned}\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}&=\frac{dx}{P_1p_1+P_2p_2+\cdots+P_np_n}\\&=\frac{-dp_1}{X_1+Xp_1}=\cdots=\frac{-dp_n}{X_n+Xp_n};\end{aligned}\right.$$

man darf dabei aber nicht aufser acht lassen, dafs die Gleichung (1) an Stelle einer in der Formel (10) enthaltenen Gleichung treten kann.

Wir nehmen nun an, dafs man die Gleichungen (10) integriert hat und dafs die willkürlichen Konstanten so bestimmt sind, dafs

$$x = \xi, \quad x_i = \xi_i, \quad p_i = \omega_i$$

ist für $x_n = \xi_n$. Es seien also:

$$(11) \quad \begin{cases} x = \varphi\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n); \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} p_1 = \psi_1\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ p_2 = \psi_2\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n = \psi_n\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n) \end{cases}$$

die nach $x, x_1, \dots x_{n-1}, p_1, \dots p_n$ aufgelösten Integrale. Das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung geht aus der Elimination von

$$\xi, \xi_1, \dots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$$

zwischen den n Gleichungen (11) und den $n+1$ Gleichungen

$$F(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) = 0,$$

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \dots \omega_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \xi_{n-1}}$$

hervor, diese Elimination ist im allgemeinen nicht möglich, aufser wenn man die willkürliche Funktion f fixiert hat. Ich will hier nicht die verschiedenen Formen diskutieren, welche man in den verschiedenen Fällen den Gleichungen (11) geben kann, und verweise hierfür auf die in den „Bemerkungen" angegebene Litteratur. Ebenso mag es dem Leser überlassen bleiben, die in Nr. 842 gegebene geometrische Deutung auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu übertragen.

849. Singuläre Lösungen. Ohne auf Entwickelungen einzugehen, welche die Grenzen dieses Werkes überschreiten würden, müssen wir doch darauf hinweisen, dafs die Methode, welche wir angewandt haben, auch gewisse singuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen läfst.

verweise ich den Leser auf die in den Bemerkungen zu Nr. 837 citierten Abhandlungen.

848. Lösung des Integrationsproblemes. Nach dem Vorstehenden genügt es, die $2n$ Gleichungen (2), (3), (7) und (8) zu betrachten. Man kann die erste derselben auch durch ihr Differential in Bezug auf x_n ersetzen, nämlich:

$$X\frac{\partial x}{\partial x_n}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}+X_n+P_1\frac{\partial p_1}{\partial x_n}+\cdots+P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0,$$

weil das vorgelegte Problem keine Unbestimmtheit mehr enthält. Indem man hierbei $\frac{\partial x}{\partial x_n}$ durch seinen Wert aus der Gleichung (3) ersetzt, und ferner

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_n},\cdots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_n},\cdots\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$$

durch ihre Werte aus den Gleichungen (7) und (8), so folgt:

$$X_n+Xp_n+P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0. \tag{9}$$

Demnach sind wir dazu gelangt, vermittelst der $2n$ Gleichungen (3), (7), (8) und (9) die Werte von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\quad p_1,\ p_2,\ldots p_n$$

zu bestimmen, die sich für $x_n=\xi_n$ bezüglich auf

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots \xi_{n-1},\quad \omega_1,\ \omega_2,\ldots\omega_n$$

reduzieren.

Die Gleichungen, um die es sich handelt, sind ihrem Wesen nach partielle Differentialgleichungen. Da sie aber die Variabelen $\xi_1,\ \xi_2,\ldots\xi_{n-1}$ nicht enthalten, so lassen sie sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. Man kann sie in einer Formel zusammenfassen, nämlich:

$$\text{(10)}\quad \begin{cases}\dfrac{dx_1}{P_1}=\dfrac{dx_2}{P_2}=\cdots=\dfrac{dx_n}{P_n}=\dfrac{dx}{P_1p_1+P_2p_2+\cdots+P_np_n}\\[2ex] \qquad\qquad =\dfrac{-dp_1}{X_1+Xp_1}=\cdots=\dfrac{-dp_n}{X_n+Xp_n};\end{cases}$$

man darf dabei aber nicht aufser acht lassen, dafs die Gleichung (1) an Stelle einer in der Formel (10) enthaltenen Gleichung treten kann.

Wir nehmen nun an, dafs man die Gleichungen (10) integriert hat und dafs die willkürlichen Konstanten so bestimmt sind, dafs

$$x = \xi, \quad x_i = \xi_i, \quad p_i = \omega_i$$

ist für $x_n = \xi_n$. Es seien also:

$$(11) \quad \begin{cases} x = \varphi\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n); \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} p_1 = \psi_1\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ p_2 = \psi_2\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_n = \psi_n\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n) \end{cases}$$

die nach $x, x_1, \ldots x_{n-1}, p_1, \ldots p_n$ aufgelösten Integrale. Das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung geht aus der Elimination von

$$\xi, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

zwischen den n Gleichungen (11) und den $n+1$ Gleichungen

$$F(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = 0,$$

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \cdots \omega_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \xi_{n-1}}$$

hervor, diese Elimination ist im allgemeinen nicht möglich, aufser wenn man die willkürliche Funktion f fixiert hat. Ich will hier nicht die verschiedenen Formen diskutieren, welche man in den verschiedenen Fällen den Gleichungen (11) geben kann, und verweise hierfür auf die in den „Bemerkungen" angegebene Litteratur. Ebenso mag es dem Leser überlassen bleiben, die in Nr. 842 gegebene geometrische Deutung auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu übertragen.

849. Singuläre Lösungen. Ohne auf Entwickelungen einzugehen, welche die Grenzen dieses Werkes überschreiten würden, müssen wir doch darauf hinweisen, dafs die Methode, welche wir angewandt haben, auch gewisse singuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen läfst.

verweise ich den Leser auf die in den Bemerkungen zu Nr. 837 citierten Abhandlungen.

848. Lösung des Integrationsproblemes. Nach dem Vorstehenden genügt es, die $2n$ Gleichungen (2), (3), (7) und (8) zu betrachten. Man kann die erste derselben auch durch ihr Differential in Bezug auf x_n ersetzen, nämlich:

$$X\frac{\partial x}{\partial x_n}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\cdots+X_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}+X_n+P_1\frac{\partial p_1}{\partial x_n}+\cdots+P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0,$$

weil das vorgelegte Problem keine Unbestimmtheit mehr enthält. Indem man hierbei $\frac{\partial x}{\partial x_n}$ durch seinen Wert aus der Gleichung (3) ersetzt, und ferner

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_n},\ldots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_n},\ldots\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$$

durch ihre Werte aus den Gleichungen (7) und (8), so folgt:

$$X_n+Xp_n+P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0. \tag{9}$$

Demnach sind wir dazu gelangt, vermittelst der $2n$ Gleichungen (3), (7), (8) und (9) die Werte von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\quad p_1,\ p_2,\ldots p_n$$

zu bestimmen, die sich für $x_n=\xi_n$ bezüglich auf

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots \xi_{n-1},\quad \omega_1,\ \omega_2,\ldots \omega_n$$

reduzieren.

Die Gleichungen, um die es sich handelt, sind ihrem Wesen nach partielle Differentialgleichungen. Da sie aber die Variabelen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ nicht enthalten, so lassen sie sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. Man kann sie in einer Formel zusammenfassen, nämlich:

$$\tag{10}\left\{\begin{aligned}\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}&=\frac{dx}{P_1p_1+P_2p_2+\cdots+P_np_n}\\&=\frac{-dp_1}{X_1+Xp_1}=\cdots=\frac{-dp_n}{X_n+Xp_n};\end{aligned}\right.$$

man darf dabei aber nicht aufser acht lassen, dafs die Gleichung (1) an Stelle einer in der Formel (10) enthaltenen Gleichung treten kann.

Wir nehmen nun an, dafs man die Gleichungen (10) integriert hat und dafs die willkürlichen Konstanten so bestimmt sind, dafs

$$x = \xi, \quad x_i = \xi_i, \quad p_i = \omega_i$$

ist für $x_n = \xi_n$. Es seien also:

$$(11) \quad \begin{cases} x = \varphi\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n); \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} p_1 = \psi_1\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ p_2 = \psi_2\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = \psi_n\,(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \ldots \omega_n) \end{cases}$$

die nach $x, x_1, \ldots x_{n-1}, p_1, \ldots p_n$ aufgelösten Integrale. Das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung geht aus der Elimination von

$$\xi, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

zwischen den n Gleichungen (11) und den $n+1$ Gleichungen

$$F(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = 0,$$

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \cdots \omega_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \xi_{n-1}}$$

hervor, diese Elimination ist im allgemeinen nicht möglich, aufser wenn man die willkürliche Funktion f fixiert hat. Ich will hier nicht die verschiedenen Formen diskutieren, welche man in den verschiedenen Fällen den Gleichungen (11) geben kann, und verweise hierfür auf die in den „Bemerkungen“ angegebene Litteratur. Ebenso mag es dem Leser überlassen bleiben, die in Nr. 842 gegebene geometrische Deutung auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu übertragen.

849. Singuläre Lösungen. Ohne auf Entwickelungen einzugehen, welche die Grenzen dieses Werkes überschreiten würden, müssen wir doch darauf hinweisen, dafs die Methode, welche wir angewandt haben, auch gewisse singuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen läfst.

so mufs, wenn wir mit dx, dy, dz die Koordinaten der Richtung bezeichnen:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sein, und auch:

$$dz = (p + \delta p)\,dx + (q + \delta q)\,dy, \quad \text{also:} \quad \delta p\,dx + \delta q\,dy = 0.$$

Da nun

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

und

$$f(x, y, z, p + \delta p, q + \delta q) = 0$$

ist, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q = 0$$

oder in unserer früheren Bezeichnung:

$$P\delta p + Q\delta q = 0.$$

Sonach wird:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{P}{Q},$$

d. h.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq}.$$

Indem man in solch einer Richtung auf irgend einer Integralfläche fortgeht, erleidet die zugehörige Tangentenebene eine ganz bestimmte Änderung, deren Gröfse dp, dq folgendermafsen zu bestimmen ist.

Denkt man sich z und folglich auch p und q als Funktionen von x und y so definiert, dafs bei allen Werten dieser Variabelen die partielle Differentialgleichung erfüllt ist, so müssen, wenn wir für die partiellen Ableitungen von f die früheren Bezeichnungen wählen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X$$

u. s. w., die Gleichungen bestehen:

$$X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$Y + Zq + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

und wenn wir in der vorgeschriebenen Richtung vorgehen, wird:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = P\frac{dp}{dx}, \quad P\frac{\partial q}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = P\frac{dq}{dx}.$$

Demnach erhalten die beiden obigen Gleichungen die Form:

$$(X + Zp) + P\frac{dp}{dx} = 0, \quad (Y + Zq) + P\frac{dq}{dx} = 0,$$

und sonach sind wir für die Fortschreitung längs einer Erzeugenden des Kegels auf das System (s. Gleichung 14) geführt:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq},$$

und zugleich ist der Satz bewiesen: *Alle Integralflächen, welche in einem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangentenebene haben, berühren sich längs einer von diesem Punkte ausgehenden Kurve, denn das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebene ändert, wenn man in derselben längs der Erzeugenden des zugehörigen Kegels fortschreitet, ist für alle Integralflächen das nämliche.*

Sonach bestimmen die von jedem Punkte des Raumes ausgehenden, einfach unendlich vielen Fortschreitungseinrichtungen eines Kegels ein System von dreifach unendlich vielen räumlichen Kurven, oder besser ein System von *charakteristischen Streifen*, indem zu jeder Raumkurve zugleich ein bestimmtes System von Tangentenebenen gehört; jede Integralfläche hat die Eigenschaft, daſs auf derselben ein einfach unendliches System dieser charakteristischen Streifen gelegen ist, und daſs die Tangentenebenen der Fläche in den Punkten solch eines Streifens mit den Ebenen, welche demselben zugeordnet sind, zusammenfallen. Ein charakteristischer Streifen ist durch sein Anfangselement bestimmt. Die Gleichungen derselben werden durch Integration des obigen Systemes erhalten, das, weil die Bedingung

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

(Nr. 137). Alle Koeffizienten p^0 nun, bei denen keiner der unteren Indices null ist, bestimmen sich aus der Anfangsbedingung (2). Es wird:

$$p_\lambda{}^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda}, \quad p_{\lambda\mu}{}^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}, \ldots; \quad (\lambda, \mu, \ldots = 1, 2, \ldots n)$$

für

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots \quad x_n = a_n.$$

Diejenigen p^0 aber, die einen unteren Index null tragen, findet man aus der Differentialgleichung. Man erhält aus ihr und den durch Differentiation folgenden Gleichungen, wenn man

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots \quad x_n = a_n, \quad z = c$$

setzt, der Reihe nach:

$$(4) \quad \begin{cases} p_0^0 = \sum_1^n{}_\lambda X_\lambda^0 \cdot p_\lambda^0 + X_0^0 \\ p_{0\alpha}^0 = \sum_1^n{}_\lambda X_\lambda^0 \cdot p_{\lambda\alpha}^0 + \sum_\lambda (X_{\lambda\alpha}^0 + p_\alpha^0 X_{\lambda, n+1}^0) \cdot p_\lambda^0 \\ \qquad\qquad + (X_{0\alpha}^0 + p_\alpha^0 \cdot X_{0, n+1}^0), \\ (\alpha = 0, 1, \ldots n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Dabei bedeutet $X_{\lambda\alpha}$ die partielle Ableitung von X_λ nach x_α, $X_{\lambda, n+1}$ die von X_λ nach z, und der obere Index 0 deutet an, daß diese Werte an der Stelle

$$x_0 = a_0, \ldots \quad x_n = a_n, \quad z = c$$

zu nehmen sind. Die sämtlichen Koeffizienten p^0 der Entwickelung (3) sind also durch die Anfangsbedingung und die Rekursionsformeln (4) bestimmt. Daher kann es nicht mehr als eine Funktion z von der verlangten Beschaffenheit geben. Ob es aber überhaupt eine solche giebt, hängt davon ab, ob die Reihe (3) mit den so bestimmten p^0 konvergiert, was nun zu untersuchen ist.

2. Die Funktionen X_α seien sämtlich regulär für alle Wertsysteme $x_0, x_1, \ldots x_n, z$, für welche

$$|x_\alpha - a_\alpha| \leq r_1, (\alpha = 0, 1 \ldots n) \quad \text{und} \quad |z - c| < R$$

ist. Alsdann giebt es eine reelle positive Zahl r_2, so daſs für alle

$$|x_\lambda - a_\lambda| \leqq r_2, (\lambda = 1 \dots n)$$

die Funktion

$$z_0 = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

regulär und gleichzeitig

$$|z_0 - c| \leqq R$$

bleibt. Sei nun r die kleinere der beiden Zahlen r_1 und r_2 und m das Maximum der Werte, die $|\varphi|$ in dem Gebiete

$$|x_\lambda - a_\lambda| \leqq r$$

annimmt, M das Maximum der Werte, die die sämtlichen $|X_\alpha|$ annehmen, wenn die

$$x_0, x_1, \dots x_n, z$$

als unabhängige Variabele in dem Gebiete

$$|x_\alpha - a_\alpha| \leqq r, |z - c| \leqq R$$

variieren. Wir bilden dann die neue Differentialgleichung für die neue Funktion ζ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_0} = \Psi(x_0, x_1, \dots x_n; \zeta) \cdot \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\zeta = \zeta_0 = \psi(x_1, \dots x_n) \quad \text{für} \quad x_0 = a_0. \tag{6}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\Psi(x_0, x_1, \dots x_n; \zeta) = \frac{M}{\prod_{\alpha=0}^{n} \left(1 - \frac{x_\alpha - a_\alpha}{r}\right) \left(1 - \frac{\zeta - m}{R}\right)}$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{m}{\prod_{\lambda=1}^{n} \left(1 - \frac{x_\lambda - a_\lambda}{r}\right)}.$$

Formal wird die Gleichung (5) und die Anfangsbedingung (6) wieder durch eine zu (3) analoge Entwickelung erfüllt:

$$\zeta = m + \frac{1}{1!} \sum_{0}^{n} {}^{\alpha} P^0_\alpha \cdot (x_\alpha - a_\alpha) + \frac{1}{2!} \sum_{0}^{n} {}^{\alpha\beta} P^0_{\alpha\beta} (x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) + \cdots,$$

wo die P^0 dieselbe Bedeutung für ζ haben, wie die p^0 für z. Diejenigen P^0, die keinen unteren Index null aufweisen, sind daher die Werte der entsprechenden partiellen Ableitungen von ψ an der Stelle

$$x_\lambda = a_\lambda, \ (\lambda = 1 \ldots n)$$

und als solche nicht kleiner als die entsprechenden p^0 nach dem Satze der Nr. 656. Es ist also:

$$|c| \leqq m, |p_\lambda^0| \leqq P_\lambda^0, |p_{\lambda\mu}^0| \leqq P_{\lambda\mu}^0, \ldots; (\lambda, \ \mu, \ldots = 1, 2 \ldots n).$$

Diejenigen P^0, die einen unteren Index 0 aufweisen, bestimmen sich aber aus einem Gleichungssystem, das aus (4) hervorgeht, wenn man immer p durch P, alle X_λ mit ihren Ableitungen aber durch die Funktion Ψ nebst ihren Ableitungen ersetzt; d. h. es ist:

$$P_0^0 = \Psi^0 \left(1 + \sum_1^n {}^\lambda P_\lambda^0 \right),$$

$$P_{0\alpha}^0 = \Psi^0 \sum_1^n {}^\lambda P_{\lambda\alpha}^0 + (\Psi_\alpha^0 + P_\alpha^0 \Psi_{n+1}^0) \left(\sum_1^n {}^\lambda P_\lambda^0 + 1 \right),$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots n),$$

. . . .

Dafs Ψ_α die partielle Ableitung von Ψ nach x_α, Ψ_{n+1} die von Ψ nach ζ bedeutet, braucht wohl nicht besonders gesagt zu werden; ebensowenig, dafs der obere Index 0 hier die Stelle

$$x_\alpha = a_\alpha, \quad (\alpha = 0 \ldots n), \quad \zeta = m$$

bedeutet, welche der Stelle

$$x_\alpha = a_\alpha, \quad z = c$$

entspricht. Nach dem Satze der Nr. 656 sind nun die X_α nebst ihren Ableitungen an dieser Stelle absolut nicht gröfser als Ψ und seine entsprechenden Ableitungen an jener Stelle. Andererseits ist bereits bewiesen, dafs die p^0, welche auf den rechten Seiten von (4) auftreten, absolut kleiner sind, als die entsprechenden P^0 auf den rechten Seiten des letzten Gleichungssystemes. Wir schliefsen daraus, dafs auch die linken Seiten

in (4) absolut kleiner sind als die linken Seiten in dem letzten Gleichungssystem; d. h. es ist:

$$|p_0{}^0| < P_0^0, \; |p_0{}^0{}_\alpha| < P_{0\alpha}{}^0, \ldots$$

Mithin sind die sämtlichen Glieder der Reihenentwickelung (3) absolut kleiner als die entsprechenden Glieder in der Entwickelung für ζ. Wenn diese konvergiert, wird jene also gewifs konvergieren. Der allgemeine Beweis unseres Satzes ist also geleistet, sobald er für die spezielle Differentialgleichung (5) mit der besonderen Anfangsbedingung (6) gelingt. Ehe wir diesen aber führen, betrachten wir noch einen anderen Spezialfall.

3. Wir nehmen an, dafs in der Differentialgleichung (1) alle Koeffizienten X_α mit Ausnahme von X_1 identisch verschwinden. Alsdann entsteht die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} = X_1(x_0, x_1, \ldots x_n; z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1}. \tag{7}$$

Die Anfangsbedingung (2) behalten wir in ihrer allgemeinen Form bei. Die zugehörige Differentialgleichung (5) wird dann:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_0} = \Psi(x_0, x_1, \ldots x_n; \zeta) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \tag{8}$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\zeta = \zeta_0 = \psi(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \text{für} \quad x_0 = a_0. \tag{6}$$

Dabei haben die Funktionen Ψ und ψ genau die oben unter 2. angegebene Form. Setzen wir aber zur Abkürzung:

$$M_1 = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_2 - a_2}{r}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n - a_n}{r}\right)}, \quad m_1 = \frac{m}{\left(1 - \frac{x_2 - a_2}{r}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n - a_n}{r}\right)},$$

so stellen M_1 und m_1 neben x_0 und x_1 zwei neue unabhängige komplexe Variabele vor. Durch ihre Einführung erhalten aber sowohl die Differentialgleichung (8), wie die Anfangsbedingung (6) genau die im Satz II der Nr. 851 angeführte Form. Es giebt also eine und nur eine in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \quad M_1 = M, \quad m_1 = m$$

reguläre analytische Funktion der vier Variabelen x_0, x_1, M_1, m_1, welche sowohl die Differentialgleichung (8) als die

Anfangsbedingung (6) erfüllt. Nun sind aber M_1 und m_1 ihrerseits analytische Funktionen von $x_2, \ldots x_n$, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$$

regulär verhalten und an dieser Stelle selbst auf

$$M_1 = M, \quad m_1 = m$$

reduzieren. Nach Nr. 654 ist daher die oben gefundene Lösung ζ, welche (8) und (6) erfüllt, eine analytische Funktion von $x_0, x_1, \ldots x_n$, welche in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$$

sich regulär verhält. Das Theorem, welches wir an die Spitze dieser Nummer gestellt haben, ist daher für die Differentialgleichung (8) bei der Anfangsbedingung (6) und daher auch für die Differentialgleichung (7) bei allgemeiner Anfangsbedingung erwiesen.

4. Um nun die Allgemeingiltigkeit unseres Satzes zu erkennen, genügt es, ihn für die Differentialgleichung (5) und die Anfangsbedingung (6) zu erweisen. Dies thun wir, indem wir neue Veränderliche einführen und dadurch unsere Gleichung (5) auf die Form (7) bringen. Wir setzen:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad y_2 = x_2 - x_1, \quad y_3 = x_3 - x_2, \ldots \quad y_n = x_n - x_{n-1}$$

und bezeichnen die dem Werte $x_\lambda = a_\lambda$ entsprechenden Werte der y_λ mit $y_\lambda = b_\lambda$. Jede analytische Funktion der x_λ, die in einer Umgebung der Stelle $x_\lambda = a_\lambda$ regulär ist, geht dann über in eine analytische Funktion der y, die in der Umgebung von $y_\lambda = b_\lambda$ regulär ist und umgekehrt. Die Differentialquotienten von ζ aber gehen über in:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \frac{1}{n}\frac{\partial \zeta}{\partial y_1} - \frac{\partial \zeta}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \frac{1}{n}\frac{\partial \zeta}{\partial y_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial y_2} - \frac{\partial \zeta}{\partial y_3}, \ldots,$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_n} = \frac{1}{n}\frac{\partial \zeta}{\partial y_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial y_n},$$

und daher wird:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} = \frac{\partial \zeta}{\partial y_1}.$$

Die Differentialgleichung (5) erhält also die Form:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_0} = \Psi\left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial y_1}\right).$$

Setzen wir schliefslich

$$\zeta + y_1 = \eta,$$

so geht die Gleichung über in

$$(9) \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x_0} = \Psi \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y_1},$$

und die Anfangsbedingung in

$$(10) \qquad \eta = \psi + y_1.$$

Nach dem Bemerkten ist aber ψ analytisch und regulär in $y_1 \dots y_n$ in der Umgebung von

$$y_1 = b_1, \dots \, y_n = b_n$$

und das gleiche gilt von $\psi + y_1$. Ebenso geht Ψ über in eine analytische Funktion von $x_0, y_1, \dots y_n, \eta$, welche in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \quad y_1 = b_1, \dots \, y_n = b_n, \quad \eta = m + b_1$$

(was $\zeta = m$ entspricht) regulär ist in ihren Argumenten $x_0, y_1 \dots y_n, \eta$. Endlich hat die Differentialgleichung (9) genau die Form (7), also ist der unter 3. bewiesene Satz anwendbar und mithin das Existenztheorem für die Gleichung (9) und die Anfangsbedingung (10) erwiesen. Geht man von den Variabelen $x_0, y_1, \dots y_n, \eta$ nun wieder über zu den ursprünglichen $x_0, x_1 \dots x_n, \zeta$, so folgt das Existenztheorem für die Gleichung (5) mit der Anfangsbedingung (6) und daher auch seine Giltigkeit für eine allgemeine lineare Differentialgleichung (1) mit einer allgemeinen Anfangsbedingung (2).

853. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir wollen annehmen, dafs die lineare homogene Differentialgleichung (1) der vorigen Nummer das z explicite nicht enthalte, und die Funktion φ in der Anfangsbedingung (2) der vorigen Nummer so spezialisieren, dafs sie der Reihe nach gleich wird:

$$x_1, \quad x_2, \dots \, x_n.$$

Dem entsprechen dann n Lösungen z der Gleichung (1) der vorigen Nummer, die wir entsprechend mit

$$\omega_1(x, x_1, \ldots x_n), \quad \omega_2(x, x_1, \ldots x_n), \ldots \omega_n(x, x_1 \ldots x_n)$$

bezeichnen wollen. Ferner schreiben wir, wie wir es soeben schon in den Argumenten der ω gethan haben, so auch im folgenden in dieser Nummer immer x statt x_0. Die ω sind voneinander unabhängig im Sinne der Nr. 725. Bestünde eine Identität:

$$\Phi[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = 0$$

bei unabhängigen Variabelen $x, x_1, \ldots x_n$, so ginge diese für $x = a_0$ über in die Gleichung:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

welche für unabhängige Variabele $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestehen müſste. Dies ist aber ein Widerspruch. Betrachtet man ferner die Determinante:

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

so ist diese für $x = a_0$ gleich 1, also von null verschieden. Hieraus folgt aber, daſs das zu (1) äquivalente simultane System:

$$-\frac{dx_0}{1} = \frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

immer n unabhängige Integrale besitzt:

$$(12) \qquad \omega_1(x, x_1, \ldots x_n) = c_1, \ldots \omega_n(x, x_1, \ldots x_n) = c_n,$$

wo die linken Seiten in der Umgebung von

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$$

reguläre analytische Funktionen ihrer Argumente sind, und daſs diese Gleichungen, nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgelöst, diese als analytische Funktionen von $x, c_1, c_2, \ldots c_n$ ergeben. Dieselben sind regulär in der Umgebung von

$$x = a_0, \quad c_1 = c_1^0, \ldots c_n = c_n^0,$$

wenn $c_1^0, c_2^0, \ldots c_n^0$ die Werte bedeuten, die $c_1, c_2, \ldots c_n$ für

$$x = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$$

annehmen. Hiermit ist auch die in Nr. 723 aufgestellte Behauptung erwiesen, nach welcher *die Lösungen eines simultanen Systemes analytische Funktionen von der unabhängigen Variabelen und der Integrationskonstanten sind,* die sich in der Umgebung der betrachteten Stelle regulär verhalten.

Unwesentlich ist bei allen diesen Betrachtungen die spezielle Form, welche wir der linearen Differentialgleichung (1) gegeben haben. In der Umgebung jeder Stelle

$$(a_0, a_1, \ldots a_n),$$

in der die Voraussetzungen des Satzes III erfüllt sind, existieren n unabhängige, reguläre Integrale bei jeder linearen homogenen Differentialgleichung der Form:

$$X_0 \frac{\partial z}{\partial x_0} + X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

vorausgesetzt, dafs die Funktionen X von $x_0, x_1, \ldots x_n$ nicht sämtlich an der Stelle

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)$$

verschwinden. Denn, ist dies nicht der Fall, so kann man das X, das an dieser Stelle nicht null ist, mit X_0 bezeichnen und die Bezeichnungsweise für die x gerade so einrichten, dafs X_0 mit $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ multipliziert erscheint. Dann kann man nach $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ die Differentialgleichung auflösen und ihr so wieder die Gestalt (1) verschaffen.

854. Systeme von linearen Gleichungen. Es ist sehr leicht, das Existenztheorem der Nr. 852 auf ein System von beliebig vielen linearen homogenen Gleichungen zu übertragen. Es gilt der:

Satz IV. *Gegeben ist ein System von q partiellen Differentialgleichungen in q unbekannten Funktionen $z_1, z_2, \ldots z_q$ von $n+1$ unabhängigen Variabelen $x_0, x_1, \ldots x_n$ von der Form:*

$$(1) \quad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_0} = \sum_{\substack{\beta=1\ldots q,\\ \gamma=1\ldots n}} {}_{\beta\gamma} X_{\alpha\beta\gamma}(x_0, x_1, \ldots x_n; z_1 \ldots z_q) \frac{\partial z_\beta}{\partial x_\gamma} + X_{\alpha 0}(x_0, x_1 \ldots x_n; z_1 \ldots z_q), \qquad (\alpha = 1, \ldots q),$$

sowie die q Anfangsbedingungen:

$$z_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, x_2, \dots x_n)$$

für $x_0 = a_0$. *Für*

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \dots x_n = a_n$$

werde $z_\alpha = c_\alpha$. *Die X sowohl als die φ seien irgend welche analytische Funktionen ihrer Argumente, die sich in der Umgebung der Stelle*

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \dots x_n = a_n, \quad z_1 = c_1, \dots z_n = c_n$$

regulär verhalten. Alsdann giebt es ein und nur ein in der Umgebung dieser Stelle reguläres System von analytischen Funktionen z_α *von* $x_0, x_1, \dots x_n$, *das sowohl die Differentialgleichungen als die Anfangsbedingungen erfüllt.*

Zum Beweise verfährt man ganz analog wie in Nr. 853. Für alle Werte

$$|x_\alpha - a_\alpha| \leqq r, |z_\beta - c_\beta| \leqq R$$

möge sein für jedes X

$$|X| < M \quad \text{und für jedes } \mu \quad |\varphi_\mu| < m.$$

Man ersetze nun alle X durch:

$$\Psi(x, x_1, \dots x_n, z_1, \dots z_q) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right) \prod_\alpha \left(1 - \frac{x_\alpha - a_\alpha}{r}\right) \prod_\beta \left(1 - \frac{z_\beta - c_\beta}{R}\right)},$$

alle φ durch

$$\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{m}{\prod_{\alpha=1}^{n} \left(1 - \frac{x_\alpha - a_\alpha}{r}\right)}.$$

Alsdann entsteht ein System von q Gleichungen für q Funktionen ζ:

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x_0} = \Psi\left(1 + \sum_{\substack{\beta = 1 \dots q \\ \gamma = 1 \dots n}} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial x_\gamma}\right)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\zeta_\alpha = \psi(x_1, \dots x_n), \; a = 1 \dots q$$

für $x_0 = a_0$, das jedenfalls nichts mehr als ein Lösungssystem von der verlangten Beschaffenheit besitzen kann.

Da nun sowohl die Differentialgleichungen als die Anfangsbedingungen für die ζ in diesen symmetrisch sind, müssen alle ζ_α — wenn sie überhaupt existieren — einander gleich sein. Setzen wir daher

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_q = \zeta,$$

so geht das System über in die eine Gleichung für ζ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_0} = \psi(x_0, x_1, \ldots x_n, \zeta, \zeta, \ldots \zeta)\left[q\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\gamma} + 1\right]$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\zeta = \psi(x_1 \ldots x_n) \quad \text{für} \quad x_0 = a_0.$$

Die Existenz einer solchen Lösung ist aber in der vorigen Nummer und damit auch das Theorem dieser Nummer erwiesen.

855. Die allgemeine Gleichung erster Ordnung. Es gilt das Theorem:

Satz V. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} = f\left(x_0, x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{1}$$

und die Anfangsbedingung:

$$z = z_0 = \varphi(x_1, \ldots x_n) \quad \text{für} \quad x_0 = a_0. \tag{2}$$

Für

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$$

werde

$$z_0 = c, \quad \frac{\partial z_0}{\partial x_1} = c_1, \cdots \frac{\partial z_0}{\partial x_n} = c_n.$$

In der Umgebung der Stelle

$$x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$$

sei φ, in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \ldots x_n = a_n, \quad z = c, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n} = c_n$$

sei f eine reguläre analytische Funktion ihrer sämtlichen Argumente, wenn diese als lauter unabhängige Veränderliche aufgefaſst werden. Alsdann giebt es eine und nur eine in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \ldots x_n = a_n$$

reguläre analytische Funktion z von $x_0, x_1, \ldots x_n$, die sowohl die Differentialgleichung als die Anfangsbedingung erfüllt.

Zum Beweise ersetzen wir die Gleichung (1) durch ein lineares System. Setzt man zunächst

$$\frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = p_\lambda \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

und betrachtet diese p_λ als neue Veränderliche, so tritt an Stelle der einen Gleichung (1) ein System von $n+1$ Gleichungen:

$$(1\text{a}) \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = f(x_0, x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n), \; \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = p_\lambda, \; (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

in $n+1$ Unbekannten $z, p_1, \ldots p_n$ mit den $n+1$ Anfangsbedingungen:

$$(2\text{a}) \qquad z = z_0 = \varphi(x_1, \ldots x_n), \quad p_\lambda = p_\lambda^0 = \frac{\partial \varphi(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_\lambda},$$

für $x_0 = a_0$.

Das System (1a) ist bereits linear, aber nicht wie in Nr. 854 nach den Ableitungen der Unbekannten nach x_0 aufgelöst. Um dies zu erreichen, differentiieren wir die erste Gleichung nach x_λ. Setzen wir zur Abkürzung:

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial z} p_\lambda = P_{\lambda 0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_\lambda} = P_\lambda, \; (\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

so werden f, $P_{\lambda 0}$, P_λ analytische Funktionen der x, z, p, die in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \ldots x_n = a_n, \quad z = c, \quad p_1 = c_1, \ldots p_n = c_n$$

regulär sind. Zugleich wird:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \, \partial x_\lambda} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_0}.$$

Die Differentiation der ersten Gleichung (1a) nach x_λ liefert also zusammen mit dieser Gleichung selbst das System

$$(1\text{b}) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_0} = f, \; \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_0} = P_{\lambda 0} + P_1 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x_\lambda} + P_2 \cdot \frac{\partial p_2}{\partial x_\lambda} + \cdots + P_n \cdot \frac{\partial p_n}{\partial x_\lambda}$$

mit den Anfangsbedingungen (2a). Hierauf ist nun das Theorem der vorigen Nummer anwendbar. Es giebt also ein

und nur ein System von analytischen Funktionen (z, p_1, $p_2, \ldots p_n$), das sich in der Umgebung der Stelle

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$$

regulär verhält und die Gleichungen (1b) und die in (2a) angegebenen Anfangsbedingungen erfüllt. Denkt man sich dieses System in die erste Gleichung (1b) eingesetzt, so entsteht eine Identität in sämtlichen x, welche, nach x_λ differentiiert, uns liefert:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial x_\lambda} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_0}.$$

Diese Gleichung besteht identisch für unser Lösungssystem von (1b). Es folgt daraus durch Integration nach x_0, dafs das Lösungssystem die Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = p_\lambda + \chi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

wo χ eine unbekannte, aber von x_0 unabhängige Funktion bedeutet. Für $x_0 = a_0$ wird aber, da das Lösungssystem die Anfangsbedingung (2a) erfüllt,

$$\frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda}$$

und zugleich auch

$$p_\lambda = \frac{\partial \varphi}{x_\lambda}.$$

Also ist χ für $x_0 = a_0$ gleich 0, identisch für alle $x_1, x_2, \ldots x_n$. Da aber χ von x_0 frei ist, ist es überhaupt identisch null. Also erfüllt unser Lösungssystem identisch für alle $x_0, x_1, \ldots x_n$ die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = p_\lambda.$$

Das gefundene z genügt also sowohl der Differentialgleichung (1) als der Anfangsbedingung (2), und unser Satz ist bewiesen.

Achtes Kapitel.

Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung.

---

§ 1. Monge-Ampèresche Gleichungen.

856. Fragestellung. Die Analysis besitzt noch keine allgemeine Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen, welche von höherer als der ersten Ordnung sind. Es giebt indessen einige Methoden, welche in gewissen Fällen zum Ziele führen, und in dieser Beziehung tritt vor allem die Klasse der Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen hervor, welche zum ersten Male von Monge untersucht und sodann von Ampère wieder aufgenommen wurde in einer Abhandlung, welche im *Journal de l'École Polytechnique* (Cah. 17 und 18) enthalten ist. Die Resultate, zu denen dieselben gelangt sind, glauben wir hier noch mitteilen zu müssen.

Indem die Variabelen durch x, y, z dargestellt sind, setzen wir:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Wir bezeichnen nun mit u und v zwei gegebene Funktionen von x, y, z, p, q, nämlich

$$u = f(x, y, z, p, q), \quad v = f_1(x, y, z, p, q),$$

und betrachten die Gleichung erster Ordnung:

$$\Phi(u, v) = 0, \tag{1}$$

in welcher Φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Indem man ebenso wie in Nr. 88 verfährt, kann man diese willkürliche Funktion eliminieren und also eine partielle Differential-

gleichung zweiter Ordnung bilden. Denn es ergeben die Differentiationen nach x und nach y bezüglich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right]+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right]=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right]+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right]=0,$$

und indem man die Verhältnisse der Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ hieraus eliminiert, erhält man eine Gleichung von der Form:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0, \tag{2}$$

in welcher H, K, L, M, N gegebene Funktionen von x, y, z, p, q sind.

Die Gleichung (1), aus welcher wir die Gleichung (2) gewonnen haben, kann auch in der Form

$$v=\varphi(u)$$

dargestellt werden, wobei φ eine willkürliche Funktion von u bezeichnet; sie heifst ein *intermediäres Integral* der Gleichung (2), und das Problem der Integration der Gleichung (2) ist dann auf die Integration der Gleichung (1) zurückgeführt.

Wir nehmen nur an, dafs H, K, L, M, N in der Gleichung (2) gegebene Funktionen von x, y, z, p, q bezeichnen. Es kann der Umstand eintreten, dafs diese Gleichung (2) kein intermediäres Integral besitzt. Existiert aber ein solches Integral, so läfst sich dasselbe folgendermafsen bestimmen.

857. Umformung des Integrationsproblems. Wir führen mit Ampère eine Funktion von x und y ein, die zunächst noch unbestimmt ist und die wir mit α bezeichnen werden; y läfst sich als eine Funktion von x und α betrachten, und folglich werden auch z, p, q Funktionen von x und α. Nach den für die Änderung der unabhängigen Variabelen geltenden Formeln wird:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p+q\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}=q\frac{\partial y}{\partial \alpha}; \tag{3}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial p}{\partial x}=r+s\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial p}{\partial \alpha}=s\frac{\partial y}{\partial \alpha},\\ \frac{\partial q}{\partial x}=s+t\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial q}{\partial \alpha}=t\frac{y}{\partial \alpha}.\end{cases} \tag{4}$$

Die Elimination von s und t zwischen den drei letzten Gleichungen (4) giebt zunächst:

$$\frac{p}{\partial\alpha} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial q}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial x}; \tag{5}$$

ferner hat man ebenfalls nach den Gleichungen (4):

$$\left\{\begin{aligned} & t = \frac{\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}, \quad s = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}; \\ & r = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

also:

$$rt - s^2 = -\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}. \tag{7}$$

Substituieren wir nun in die Gleichung (2) die Werte von $r, s, t, rt - s^2$ aus den Gleichungen (6) und (7), so folgt:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\frac{\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\frac{\partial y}{\partial\alpha}} = 0, \tag{8}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left\{\begin{aligned} & \mathfrak{P} = H\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 2K\frac{\partial q}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2, \\ & \mathfrak{Q} = H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\frac{\partial y}{\partial x} + L + N\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Wir verfügen jetzt über die unbekannte Funktion von x und α, welche y definiert, derart, dafs $\mathfrak{Q} = 0$ wird; die Gleichung (8) reduziert sich alsdann auf $\mathfrak{P} = 0$; mithin ist das Problem darauf zurückgeführt, vier Funktionen y, z, p, q von x und α zu finden, welche den beiden Gleichungen (3) genügen, ferner der Gleichung (5), und endlich den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{P} = 0, \quad \mathfrak{Q} = 0.$$

Wenn man in der zweiten Gleichung (9) an Stelle von $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ ihre Werte aus den Gleichungen (4) einsetzt, so folgt:

$$\mathfrak{Q} = (H + Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{\partial y}{\partial x} + (L + Nr),$$

und folglich ergiebt die Gleichung $\mathfrak{Q} = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt}$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$G = K^2 - HL + MN \tag{10}$$

setzt und die Gleichung (2) beachtet:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{G}}{H + Nt}.$$

Hieraus folgt:

$$H\frac{\partial y}{\partial x} + N\left(s + t\frac{\partial y}{\partial x}\right) = K \pm \sqrt{G}$$

oder, indem man wieder $\frac{\partial q}{\partial x}$ an Stelle von $s + t\frac{\partial y}{\partial x}$ einführt:

$$H\frac{\partial y}{\partial x} + N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0. \tag{11}$$

Die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$ wird, wenn man $H\frac{\partial y}{\partial x}$ durch seinen Wert aus der Gleichung (11) ersetzt:

$$H\frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x} + M = 0. \tag{12}$$

Wenn H und N nicht null ist, so kann die Gleichung (12) auch durch die folgende ersetzt werden:

$$N\frac{\partial p}{\partial x} - (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial y}{\partial x} + L = 0, \tag{13}$$

welche man durch Elimination von $\frac{\partial q}{\partial x}$ aus den beiden vorigen erhält.

858. Bedingung für die Ausführbarkeit der Integration. Die Einführung der Variabelen α hat den Zweck, die Erzeugung einer durch die partielle Differentialgleichung dargestellten Fläche vermittelst eines Systemes von Kurven zur Evidenz zu bringen. Dieser Parameter α ist konstant für

eine erzeugende Kurve, längs welcher y und z Funktionen von x allein sind, und folglich ist für solch eine Kurve $d\alpha$ gleich null. Die Gleichungen (11) und (12), welche für diese Kurve gelten, können also folgendermaßen geschrieben werden:

$$(14) \quad \begin{cases} H dy + N dq - (K \pm \sqrt{G})\, dx = 0, \\ H dp + (K \mp \sqrt{G})\, dq + M dx = 0, \\ \qquad dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Die Methode der Integration, welche wir im Auge haben, führt nur in dem Falle zum Ziel, wo man eine Funktion V der Größen x, y, z, p, q bestimmen kann, deren totales Differential auf Grund der drei Gleichungen (14) null wird. Nun ist:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq;$$

wir eliminieren dp, dq, dz zwischen den Gleichungen (14) und der Gleichung $dV = 0$, und setzen die Koeffizienten der nachbleibenden Differentiale dx und dy gleich null, so folgt:

$$(15) \quad \begin{cases} N \frac{\partial V}{\partial x} + N p \frac{\partial V}{\partial z} - L \frac{\partial V}{\partial p} + (K \pm \sqrt{G}) \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ N \frac{\partial V}{\partial y} + N q \frac{\partial V}{\partial z} + (K \mp \sqrt{G}) \frac{\partial V}{\partial p} - H \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

oder durch Elimination von $\frac{\partial V}{\partial q}$:

$$(16) \quad H \frac{\partial V}{\partial x} + (K \pm \sqrt{G}) \frac{\partial V}{\partial y} + [Hp + (K \pm \sqrt{G}) q] \frac{\partial V}{\partial z} - M \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Die beiden Gleichungen (15) reduzieren sich auf eine einzige, wenn $N = 0$ ist; in diesem Falle tritt die Gleichung (16) an die Stelle von einer derselben.

Die Funktion V muſs also zugleich zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen. Umgekehrt läſst sich leicht beweisen, daſs, wenn eine Funktion V existiert, welche die Gleichungen (15) und folglich auch die Gleichung (16) erfüllt, dieselbe auch der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung genügt, wenn man

$$(17) \qquad dV = 0 \quad \text{oder} \quad V = \text{const.}$$

setzt. Denn die Gleichung (17) ergiebt durch Differentiation nach x und y:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + r\frac{\partial V}{\partial p} + s\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + s\frac{\partial V}{\partial p} + t\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Berechnet man hieraus die Werte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$, um sie in die Gleichung (15) einzuführen, von denen wir annahmen, dafs sie identisch erfüllt sind, so folgt:

$$-(L + Nr)\frac{\partial V}{\partial p} + (K \pm \sqrt{G} - Ns)\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$(K \mp \sqrt{G} - Ns)\frac{\partial V}{\partial p} - (H + Nt)\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

und die Elimination der Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$ ergiebt folglich:

$$(L + Nr)(H + Nt) - (K - Ns)^2 + G = 0,$$

also:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

859. Durchführung der Integration in einem besonderen Falle. Wir nehmen demnach an, dafs die Gleichungen (15) eine gemeinsame Lösung besitzen. Enthält diese Lösung eine willkürliche Funktion, so liefert sie ein intermediäres Integral der ursprünglichen Gleichung. Diese Annahme wird erfüllt sein, wenn man zwei Funktionen u und v von x, y, z, p, q finden kann, deren Differentiale vermöge der Gleichungen (14) null werden; denn es ist evident, dafs dann dieselbe Eigenschaft auch der Funktion $\Phi(u, v)$ zukommt, was auch immer die Funktion Φ sein mag; man genügt folglich den Gleichungen (15), indem man $V = \Phi(u, v)$ annimmt, und hat sonach das intermediäre Integral

$$\Phi(u, v) = 0 \quad \text{oder} \quad v = \varphi(u);$$

φ bezeichnet wie Φ eine willkürliche Funktion. Die Erzeugende der durch dieses Integral dargestellten Fläche ist definiert durch die beiden Gleichungen

$$u = \alpha, \quad v = \varphi(\alpha),$$

wobei α ein variabeler Parameter ist.

Es bleibt nun noch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren. Wenn aber die mit G bezeichnete Gröfse nicht null ist, so kann unsere Methode uns zwei intermediäre Integrale liefern:

$$v = \varphi(u), \quad v_1 = \varphi(u_1),$$

indem man die Wurzel $\sqrt{G}$ nacheinander mit dem positiven und mit dem negativen Zeichen nimmt. Dann hängt die Bestimmung von z nur von der Integration einer totalen Differentialgleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ab, indem p und q bestimmte Funktionen von x, y, z auf Grund der beiden intermediären Integrale sind. Um diese letzte Rechnung auszuführen, kann man als unabhängige Variabele die Gröfsen wählen, von denen die willkürlichen Funktionen abhängen.

860. Verallgemeinerungen. Die vorstehende Methode läfst sich ohne Schwierigkeiten auf alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausdehnen, welche intermediäre Integrale zulassen. Handelt es sich aber dabei um eine Gleichung, welche nicht die Form hat, welche wir voraussetzten, so enthalten die entsprechenden Gleichungen wie (14), auf welche die Methode führt, noch die Ableitungen r, s, t; man mufs denselben dann noch die beiden Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

hinzufügen. Die weitere Rechnung bleibt mit einigen Komplikationen die nämliche; wir können indessen bei diesem Gegenstande nicht verweilen.

861. Geometrische Interpretationen. Eine Flächenfamilie, bei welcher sich jede Fläche aus einfach unendlich vielen Kurven eines zweifach unendlichen Systemes zusammensetzt, ist durch eine *lineare* partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung charakterisiert; eine Flächenfamilie dagegen, bei welcher jede Fläche das Umhüllungsgebilde eines einfach unendlichen Flächensystemes bildet, das aus einem zweifach unendlichen beliebig herausgegriffen wird, hängt von einer

nicht linearen partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung ab. Wir wollen zeigen, wie man durch Erweiterung dieser Sätze zu gewissen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kommt.

Es sei ein System von dreifach unendlich vielen Raumkurven, oder — wie man sagt — ein *Komplex* von Kurven, gegeben durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad F(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0,$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ willkürliche Konstanten sind. Greift man ein einfach unendliches System heraus, indem man die willkürlichen Gleichungen

$$\alpha_2 = \varphi(\alpha_1), \quad \alpha_3 = \psi(\alpha_1)$$

einführt, so entsteht eine Fläche. Ihre partiellen Ableitungen p, q sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y};$$

also ist:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} : \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z}}$$

oder:

$$(2)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten die willkürlichen Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nicht aber die Ableitungen derselben; schreibt man die Gleichung (2) in der Form:

$$(3)\qquad Z + pX + qY = 0,$$

so ist sie eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Man kann darin zwei der Konstanten vermittelst der Gleichungen (1) eliminieren; alsdann enthält die Gleichung noch eine willkürliche Konstante, und also ist die Flächenfamilie auf drei verschiedene Weisen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche noch eine will-

kürliche Konstante enthält, charakterisierbar. Man bilde nun weiter durch partielle Differentiation nach x und nach y:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)+q\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)+rX+sY=0,$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)+p\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)+sX+tY=0$$

und ersetze $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}:\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}$ durch seinen Wert aus der obigen Gleichung, so wird:

$$\frac{\frac{\partial Z}{\partial x}+p\frac{\partial X}{\partial x}+q\frac{\partial Y}{\partial x}+rX+sY}{\frac{\partial Z}{\partial y}+p\frac{\partial X}{\partial y}+q\frac{\partial Y}{\partial y}+sX+tY}=\frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$\frac{A+rX+sY}{B+sX+tY}=\frac{C}{D},$$

so ist

$$(4)\qquad (AD-BC)+rXD+s(YD-XC)-tYC=0,$$

und dies ist die Form der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf welche jede Fläche des betrachteten Systemes führt, wenn man hier noch die eine willkürliche Gröſse α_1 vermittelst der Gleichung (3) eliminiert. Zwischen den Koeffizienten von r, s, t besteht die Beziehung, daſs

$$-4XYCD=(YD-XC)^2$$

ist, denn es ist wegen (3):

$$CX+DY=\frac{\partial F}{\partial x}X+\frac{\partial F}{\partial y}Y-\frac{\partial F}{\partial z}Z=0.$$

Die Flächenfamilie ist also charakterisiert durch eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$Hr+2Ks+Lt+M=0,$$

in welcher $HL-K^2=0$ *ist; wobei diese Gleichung drei erste Integrale mit je einer willkürlichen Konstanten, oder, da zwischen den willkürlichen Konstanten zwei willkürliche Funktionen eingeführt werden können, zwei intermediäre Integrale besitzt.*

Es werde ferner ein dreifach unendliches System von Flächen betrachtet:

$$z = F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \tag{1}$$

und aus demselben vermittelst zweier willkürlicher Funktionen:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad \psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

ein einfach unendliches System herausgehoben. Jede Einhüllende eines solchen Systemes gehört einer Flächenfamilie an, deren partielle Differentialgleichung ermittelt werden soll; es ist:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y},$$

und da für die einhüllende Fläche auch

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0$$

wird, so ist

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{2}$$

Da man aus den Gleichungen (1) und (2) zwei willkürliche Konstanten eliminieren kann, so sieht man, daſs die Flächenfamilie auf drei verschiedene Weisen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung charakterisiert werden kann, in welcher eine willkürliche Konstante vorkommt. Es ist nun weiter, wenn man zur Vereinfachung für α_1 immer α schreibt:

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

und weil ferner

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

so wird:

$$\left(r - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(s - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$\left(t - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2.$$

Also ist
$$\left(r-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(t-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)-\left(s-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2=0$$
oder
$$(3)\; r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-(rt-s^2)-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=0.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:
$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0,$$
indem man sich aus den Gleichungen (1), (2), (3) die willkürlichen Konstanten eliminiert denkt, so ist:
$$\frac{H}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}=\frac{K}{-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}}=\frac{L}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}=\frac{M}{-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2\right]}=\frac{N}{-1},$$
und es ist
$$G=K^2-(HL-MN)=0.$$

Die betrachtete Flächenfamilie hängt ab von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche nicht mehr linear ist, sondern das Glied $rt-s^2$ enthalten mufs. Zwischen den Koeffizienten derselben besteht die Relation $G=0$, und sie besitzt drei erste Integrale mit je einer willkürlichen Konstanten oder zwei intermediäre Integrale.

Dafs nun auch umgekehrt eine Differentialgleichung, welche diese Eigenschaften hat, auf eine solche Flächenfamilie führt, ist aus den oben entwickelten Integrationsmethoden leicht zu beweisen.

§ 2. Anwendungen.

862. Die schwingende Saite. *Es soll die Gleichung der schwingenden Saite*
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \textit{oder} \quad r-a^2t=0$$
integriert werden, wobei a eine Konstante ist.

Hier ist
$$H=1,\quad K=0,\quad L=-a^2,\quad M=0,\quad N=0,\quad \sqrt{G}=a.$$

Die Gleichungen (14) der Nr. 858 ergeben:
$$dy\mp a\,dx=0,\quad dp\mp a\,dq=0,$$
also
$$y\mp ax=\text{const},\quad p\mp aq=\text{const};$$

man hat folglich zwei intermediäre Integrale, die man in der Form schreiben kann:

$$p + aq = 2a\varphi'(y + ax), \qquad p - aq = -2a\psi'(y - ax);$$

φ und ψ sind willkürliche Funktionen, deren Ableitungen φ' und ψ' sind. Hieraus folgt:

$$p = a\varphi'(y + ax) - a\psi'(y - ax),$$
$$q = \varphi'(y + ax) + \psi'(y - ax),$$

ferner:

$$dz = \varphi'(y + ax)(dy + adx) + \psi'(y - ax)(dy - adx)$$

und schliefslich

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax);$$

es ist unnötig, hier noch eine willkürliche Konstante hinzuzufügen, weil φ und ψ willkürliche Funktionen sind.

863. Direkte Integration derselben Gleichung. Die Gleichung

$$r - a^2 t = 0$$

kann man auch unmittelbar integrieren, ohne dafs man dabei auf die allgemeine Theorie des vorigen Paragraphen zurückgeht. Es genügt,

$$y + ax = \alpha, \quad y - ax = \beta$$

zu setzen und α und β als neue Variabele einzuführen. Dann ist:

$$p = a\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\right), \quad q = \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta},$$
$$r = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right),$$
$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}.$$

Die ursprüngliche Differentialgleichung wird demnach:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \beta}}{\partial \alpha} = 0,$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \psi'(\beta),$$

wobei $\psi'(\beta)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion $\psi(\beta)$ ist. Eine zweite Integration ergiebt:

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

wobei φ eine zweite willkürliche Funktion ist; dies ist das Resultat, auf welches auch unsere allgemeine Methode geführt hat.

364. Die abwickelbaren Flächen. *Es soll die partielle Differentialgleichung*

$$rt - s^2 = 0$$

integriert werden, welche den developpabelen Flächen angehört (Nr. 352).

Die Gleichungen (15) der Nr. 358 reduzieren sich hier auf:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Um die erste zu integrieren, muſs man y, p, q als Konstanten ansehen, bei der Integration der zweiten hat man x, p, q als Konstanten zu betrachten. Also hat man für die erste Gleichung

$$V = \text{ einer Funktion von } z - px, y, p, q,$$

und für die zweite

$$V = \text{ einer Funktion von } z - qy, x, p, q;$$

man erhält also eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen, wenn man

$$V = \Phi(z - px - qy, p, q)$$

setzt; und man genügt der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung, wenn man diesen Wert von V null setzt.

Demnach hat man zwei intermediäre Integrale der Gleichung

$$rt - s^2 = 0,$$

nämlich:

$$q = \varphi(p), \quad z - px - qy = \psi(p),$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen sind. Man muſs aber bemerken, daſs in dem vorliegenden Falle auch eine Lösung existiert, welche eine willkürliche Funktion von zwei Gröſsen enthält, nämlich:

$$z - px - qy = \Psi(p, q).$$

Um die Integration zu vollenden, hat man die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

mit den intermediären Integralen zu verbinden; dieselben ergeben durch Differentiation:

$$dq = \varphi'(p)dp, \quad x\,dp + y\,dq + \psi'(p)dp = 0,$$

also wird durch Elimination von dq:

$$x + y\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Das gesuchte Integral folgt also aus der Elimination von p zwischen den beiden Gleichungen

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p), \quad 0 = x + y\varphi'(p) + \psi'(p).$$

Man erhält demnach die einhüllende Fläche einer beweglichen Ebene.

865. Drittes Beispiel. *Es sollen die Flächen bestimmt werden, bei denen das eine System der Krümmungskurven in parallelen Ebenen gelegen ist.*

Indem wir x, y, z als rechtwinklige Koordinaten und die zur Ebene xz parallelen Ebenen als Ebenen der Krümmungskurven annehmen, wird die partielle Differentialgleichung der gesuchten Flächen (Nr. 320):

$$pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

Hier ist

$$H = pq, \quad 2K = -(1 + p^2),$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = \frac{1 + p^2}{2}.$$

Die Gleichungen (14) in Nr. 858 werden also, wenn man $\sqrt{G}$ das Zeichen + giebt:

$$dy = 0, \quad pq\,dp - (1 + p^2)dq = 0,$$

und wenn man $\sqrt{G}$ mit dem Zeichen − nimmt:

$$pq\,dy + (1 + p^2)dx = 0, \quad dp = 0.$$

Wir betrachten zunächst das erste System; es ist $y = \text{const}$, ferner:

$$\frac{p\,dp}{1 + p^2} - \frac{dq}{q} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{q}{\sqrt{1 + p^2}} = \text{const}.$$

Man bekommt also das intermediäre Integral

$$q = \sqrt{1+p^2}\,\varphi'(y),$$

wobei $\varphi'(y)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion $\varphi(y)$ ist.

Die Gleichungen des zweiten Systemes sind, weil

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist:

$$p\,dz + dx = 0, \quad dp = 0,$$

also ist:

$$pz + x = \text{const} \quad \text{und} \quad p = \text{const},$$

und folglich wird

$$x = -pz + \Psi(p)$$

das zweite intermediäre Integral, in dem Ψ eine willkürliche Funktion ist. Es bleibt also die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

zu integrieren; zu dem Zwecke wählen wir y und q als die unabhängigen Variabelen. Das zweite Integral ergiebt:

$$dx = -p\,dz - z\,dp + \Psi'(p)\,dp.$$

Indem man diesen Wert von dx und ebenso den Wert von dq aus dem ersten Integral substituiert, erhält man:

$$\sqrt{1+p^2}\,dz + \frac{zp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\Psi'(p)\,dp + \varphi'(y)\,dy.$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung sind exakte Differentiale, und da

$$\int \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\Psi'(p)\,dp = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\Psi(p) - \int \Psi(p)\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

ist, so wird, wenn man zur Beseitigung des Integralzeichens

$$\Psi(p) = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{d\,\frac{\psi(p)}{\sqrt{1+p^2}}}{dp}$$

setzt, wobei $\psi(p)$ eine neue willkürliche Funktion ist:

$$z\sqrt{1+p^2} = -p\sqrt{1+p^2}\,\psi'(p) + \sqrt{1+p^2}\,\psi(p) + \varphi(y).$$

Zugleich bekommt das zweite intermediäre Integral die Form:

$$x + pz = -(1+p^2)\psi'(p) + p\psi(p),$$

und die Gleichung der gesuchten Flächen ist das Resultat der Elimination von p zwischen den beiden vorigen Gleichungen. Setzt man:

$$V = z - px - \sqrt{1+p^2}\,\varphi(y) - \psi(p),$$

so kann das System dieser beiden Gleichungen durch

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

ersetzt werden. Die Flächen, zu denen diese Gleichungen gehören, besitzen Kurven von Nabelpunkten (Nr. 316), die durch die Gleichung

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}$$

bestimmt sind.

866. Die Minimalflächen. In Nr. 98 haben wir die Transformation von Legendre kennen gelernt; sie ist bei Integrationsproblemen oftmals von Nutzen, und dafür wollen wir hier ein Beispiel geben.

Aufgabe. *Es soll die allgemeine Gleichung der Flächen bestimmt werden, bei denen in jedem Punkte die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.*

Für diese Flächen ist also die mittlere Krümmung allenthalben gleich null (Nr. 308); sie heifsen *Minimalflächen.* Ihre partielle Differentialgleichung ist nach Nr. 317:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \tag{1}$$

Wendet man die Transformation von Legendre an, indem man

$$u = px + qy - z, \tag{2}$$

also

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q} \tag{3}$$

setzt und p und q als unabhängige Variabele einführt, so wird die Gleichung (1):

$$(1 + q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} + (1 + p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) liefern:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial y}{\partial q},$$

und folglich kann die Gleichung (4) in jeder der beiden folgenden Formen geschrieben werden:

$$(1+q^2)\frac{\partial y}{\partial q}+2pq\frac{\partial x}{\partial q}+(1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p}=0,$$

$$(1+q^2)\frac{\partial y}{\partial q}+2pq\frac{\partial y}{\partial p}+(1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p}=0.$$

Indem man die erste dieser Gleichungen nach p und die zweite nach q differentiiert, erhält man zwei neue Gleichungen, welche sich aus der folgenden:

$$(5)\quad (1+q^2)\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}+2pq\frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial q}+(1+p^2)\frac{\partial^2 U}{\partial p^2}+2q\frac{\partial U}{\partial q}+2p\frac{\partial U}{\partial p}=0$$

ableiten lassen, wenn man hier einmal $U=x$ und das andere Mal $U=y$ setzt. Und wenn man u durch $px+qy-z$ in der Gleichung (4) ersetzt und das eben gefundene Resultat beachtet, so erkennt man, dafs die Gleichung (5) auch für $U=z$ erfüllt ist. Demnach genügen die drei Koordinaten x, y, z, betrachtet als Funktionen von p und q, der nämlichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Methode der Nr. 858 ist auf diese Gleichung (5) nicht anwendbar; indessen werden die Gleichungen (15) in jener Nummer, übertragen auf die gegenwärtigen Bezeichnungen, durch eine Funktion V der beiden Variabelen p und q erfüllt, und indem man diese Funktion gleich einer willkürlichen Konstanten α setzt, erhält man ein partikulares Integral der Gleichung (5). Das nämliche Integral kann man auch aus der ersten der Gleichungen (14) in Nr. 858 erhalten, nämlich:

$$(1+p^2)-(pq\pm\sqrt{-1-p^2-q^2})\frac{dp}{dq}=0.$$

Diese Gleichung ergiebt durch totale Differentiation nach q und Einsetzung von $\frac{dp}{dq}$:

$$\frac{d^2p}{dq^2}=0,\quad \text{also}\quad \frac{dp}{dq}=\text{const.}$$

Wir bezeichnen die Konstante mit α oder β, je nachdem die Wurzel $\sqrt{-1-p^2-q^2}$ mit dem einen oder dem anderen Vorzeichen genommen wird; also ist:

$$(6)\quad \begin{cases} 1+p^2=\alpha(pq+\sqrt{-1-p^2-q^2}),\\ 1+p^2=\beta(pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}).\end{cases}$$

Da die Gleichung (5) erfüllt ist, wenn man U den Wert von α oder von β beilegt, so ist evident, daſs sich dieselbe vereinfacht, indem man α und β als unabhängige Variabele an Stelle von p und q einführt. Es folgt aus den Gleichungen (6):

$$p = \alpha q + \sqrt{-1-\alpha^2}, \quad p = \beta q + \sqrt{-1-\beta^2},$$

also:

$$p = \frac{\alpha\sqrt{-1-\beta^2} - \beta\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha-\beta}, \quad q = \frac{\sqrt{-1-\beta^2} - \sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha-\beta},$$

und man findet, daſs sich die Gleichung (5) auf

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0$$

reduziert, deren Integral

$$U = \Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$$

ist, wobei Φ und Ψ willkürliche Funktionen sind. Man kann also schreiben:

$$x = \frac{\partial u}{\partial p} = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta),$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen sind. Unter der Annahme $q = \text{const}$ hat man:

$$dp = q\,d\alpha + d\sqrt{-1-\alpha^2} = q\,d\beta + d\sqrt{-1-\beta^2},$$

also ist:

$$\frac{\partial u}{\partial p}dp = q[\varphi'(\alpha)d\alpha + \psi'(\beta)d\beta] + \varphi'(\alpha)d\sqrt{-1-\alpha^2} + \psi'(\beta)d\sqrt{-1-\beta^2}$$

und

$$u = q[\varphi(\alpha) + \psi(\beta)] + \varphi'(\alpha)\sqrt{-1-\alpha^2} + \psi'(\beta)\sqrt{-1-\beta^2}$$
$$-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)d\alpha - \int_{\beta_0}^{\beta}\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)d\beta + \chi(q),$$

wobei $\chi(q)$ eine bestimmte Funktion von q ist. Differentiiert man nach q, so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = y = [\varphi(\alpha) + \psi(\beta)] + q\left[\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dq} + \psi'(\beta)\frac{d\beta}{dq}\right]$$
$$+ \varphi'(\alpha)\frac{d\sqrt{-1-\alpha^2}}{dq} + \psi'(\beta)\frac{d\sqrt{-1-\beta^2}}{dq} + \chi'(q),$$

und es ist, wenn p konstant ist:

$$0 = \alpha dq + q d\alpha + d\sqrt{-1-\alpha^2} = \beta dq + q d\beta + d\sqrt{-1-\beta^2},$$

also:

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)] + [\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)] + \chi'(q).$$

Da aber y von der Form $\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$ ist, so mufs $\chi'(q)$ eine Konstante sein; man kann dieselbe mit den willkürlichen Funktionen φ und ψ vereinigen, also $\chi'(q)$ null setzen. Folglich ist:

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)] + [\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)].$$

Da die Funktion $\chi(q)$ konstant ist, so läfst sie sich mit den Integralen zusammenziehen, welche in dem obigen Werte von u auftreten, und deren untere Grenzen willkürlich sind. Aus diesem Werte von u folgt der Wert von z nach der Gleichung (2), nämlich:

$$z = \int \sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)d\alpha + \int \sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)d\beta.$$

Demnach geht das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung aus der Elimination von α und β zwischen den drei Gleichungen hervor:

$$(7)\quad \begin{cases} x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta), \\ y = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta), \\ z = \int \sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)d\alpha + \int \sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)d\beta, \end{cases}$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen bedeuten. Wiewohl diese Gleichungen komplexe Gröfsen enthalten, so stellen sie doch auch unendlich viele reelle Flächen dar.

§ 3. Lineare Gleichungen.

867. Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung irgendwelcher Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Variabelen, die aber in Bezug auf die unbekannte Funktion und ihre partiellen Ableitungen linear ist.

Es ist evident, dafs man, wenn diese Gleichung ein *zweites Glied* enthält, nur eine partikulare Lösung der Gleichung zu kennen braucht, um dieses zweite Glied verschwinden zu lassen.

Hat die vorgelegte Gleichung kein zweites Glied, so besitzt sie zwei Eigenschaften, die wir für den Fall der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung in der Nr. 767 festgestellt haben, nämlich *erstens:* kennt man eine Funktion, die der partiellen Gleichung genügt, so erhält man eine allgemeinere Lösung, wenn man diese Funktion mit einer willkürlichen Konstante multipliziert; *zweitens:* wenn gegebene Funktionen in irgendwelcher Anzahl die Gleichung befriedigen, so genügt ihr auch die Summe dieser Funktionen.

Wenn es sich um eine lineare partielle Differentialgleichung ohne zweites Glied handelt, deren Koeffizienten konstant sind, so liefern die genannten Eigenschaften eine Lösung der Differentialgleichung, welche so viele willkürliche Konstanten enthält, als man nur will; bisweilen führen sie auch zu einer Lösung, welche willkürliche Funktionen enthält. Um dies zu zeigen, betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Variabelen x und y; doch läfst sich unsere Untersuchung auch bei beliebig vielen Veränderlichen durchführen.

Die lineare partielle Differentialgleichung sei:

$$(1)\quad 0 = a_0 z + \left(b_0 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \cdots,$$

ihre Ordnung sei n und ihre Koeffizienten konstant. Wir ersetzen z durch $e^{\alpha x + \beta y}$, so wird das Resultat dieser Substitution $e^{\alpha x + \beta y} f(\alpha, \beta)$, wenn man

$$f(\alpha, \beta) = a_0 + (b_0 \alpha + b_1 \beta) + (c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha \beta + c_2 \beta^2) + \cdots$$

setzt. Ist also die Gleichung

$$(2)\qquad f(\alpha, \beta) = 0$$

erfüllt, wenn man $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ setzt, und bezeichnet C_0 eine willkürliche Konstante, so wird der Gleichung (1) durch die Funktion

$$z = C_0 e^{\alpha_0 x + \beta_0 y}$$

genügt; und da die Gleichung (2) unendlich viele Lösungen (α, β) zuläfst, so ist auch:

$$(3)\qquad z = \Sigma C e^{\alpha x + \beta y}$$

eine Lösung der Gleichung (1) und enthält beliebig viele Terme.

868. Lösungen mit willkürlichen Funktionen. Der Fall, dafs einige der Wurzeln β der Gleichung (2) lineare Funktionen von α sind, ist besonders zu bemerken; alsdann kann man eine Lösung der partiellen Differentialgleichung bilden, welche ebensoviele willkürliche Funktionen enthält, als solche Wurzeln β vorkommen. Denn nehmen wir an, dafs man aus der Gleichung (2)

$$\beta = m\alpha + n$$

entnehmen kann, so giebt die Formel (3), wenn man für β diesen Wert nimmt:

$$z = e^{ny} \Sigma C e^{(x+my)\alpha}.$$

Die Zahl der Glieder in dieser Summe ist unbestimmt; die Exponenten α in denselben und die Koeffizienten C sind willkürlich; also ist die Summe eine willkürliche Funktion von e^{x+my} oder auch von $x + my$. Folglich erhält man die Lösung:

$$z = e^{ny} \Phi(x + my),$$

wobei Φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, wie man nun umgekehrt leicht verifizieren kann.

Hat die Gleichung (2) eine zweite Wurzel

$$\beta = m_1 \alpha + n_1,$$

die eine lineare Funktion von α ist, so kann man die neue Lösung

$$z = e^{n_1 y} \Phi_1(x + m_1 y)$$

bilden, und so fort. Die Summe dieser Lösungen, nämlich:

$$z = e^{ny} \Phi(x + my) + e^{n_1 y} \Phi_1(x + m_1 y) + \cdots$$

ist auch noch eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

869. Anwendung auf die schwingende Saite. Verschiedene Fragen der mathematischen Physik führen auf partielle Differentialgleichungen der hier betrachteten Art. Bei diesen Aufgaben mufs die unbekannte Funktion überdies noch gewissen besonderen Anfangs- oder Grenzbedingungen genügen, und um die vollständige Lösung zu erhalten, mufs man über die willkürlichen Elemente so verfügen können, dafs die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Wir beschränken uns hier auf die Gleichung des Problemes der schwingenden Saite, das uns schon in den Nrn. 862 und 863 beschäftigt hat.

Die Aufgabe besteht hier darin, eine Funktion y der Variabelen x und t zu finden, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

genügt und so beschaffen ist, dafs für $t = 0$

$$y = F(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f(x) \tag{2}$$

wird, wobei $F(x)$ und $f(x)$ gegebene Funktionen von x sind; a bedeutet eine reelle Konstante.

Indem man $e^{\alpha x + \beta t}$ für y in die Gleichung (1) substituiert, erhält man

$$\beta^2 - a^2 \alpha^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\beta = + a\alpha, \quad \beta = - a\alpha,$$

also hat man nach Nr. 868:

$$y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at), \tag{3}$$

wobei Φ und Ψ willkürliche Funktionen sind. Es bleibt also die Bedingung für $t = 0$ zu erfüllen; man folgert aus (3):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\Phi'(x + at) - a\Psi'(x - at), \tag{4}$$

und für $t = 0$ geben die Gleichungen (3) und (4):

$$y = \Phi(x) + \Psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a\Phi'(x) - a\Psi'(x).$$

Um den Gleichungen (2) zu genügen, mufs man

$$\Phi(x) + \Psi(x) = F(x), \quad \Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F_1(x)$$

setzen, also wird

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F_1(x), \quad \Psi(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}F_1(x),$$

und folglich ist

$$y = \frac{F(x + at) + F(x - at)}{2} + \frac{F_1(x + at) - F_1(x - at)}{2}.$$

Die vollständige Lösung des physikalischen Problemes wird aus dieser allgemeinen Gleichung gewonnen, indem man noch die Bedingungen beachtet, dafs die schwingende Saite von der Länge l in ihren Endpunkten $x = 0$ und $x = l$ festgehalten ist.

870. Integration durch unendliche Reihen. Die Fälle, in denen man die partiellen Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung vollkommen durch allgemeine Funktionen integrieren kann, sind an Zahl sehr gering, und man ist daher bei den Anwendungen darauf angewiesen, die Integration vermittelst unendlicher Reihen zu versuchen. Aber auch dieses Verfahren ist nur bei den linearen Gleichungen zweckmäſsig; man kann dann die Formel von Maclaurin oder die von Taylor wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden. Oftmals ist auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten vorzuziehen, sie bietet eine gröſsere Allgemeinheit, denn sie läſst die Entwickelung der Integrale in eine Reihe finden, welche nach Potenzen irgend einer Funktion der unabhängigen Variabelen fortschreitet.

Man kann auch das Integral der nämlichen Gleichung durch verschiedene Reihen darstellen, welche sich oft noch durch die Zahl der willkürlichen Funktionen unterscheiden. Hieraus folgt, daſs man nicht von vornherein die Zahl und Beschaffenheit der willkürlichen Funktionen angeben kann, welche in dem allgemeinsten Integrale einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung auftreten.

871. Die Gleichung der Wärmeleitung. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

die in der mathematischen Theorie der Wärmeleitung auftritt; a bezeichnet eine gegebene reelle Konstante. Aus der Differentiation nach t folgt:

$$\tag{2} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = a\dfrac{\partial^2 \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} = a^2\dfrac{\partial^4 \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^4} = a^3\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und wenn man t den besonderen Wert t_0 beilegt, so bestimmen die Gleichungen (1) und (2) die entsprechenden Werte der aufeinander folgenden Ableitungen von u nach t. Aber der Wert von u bleibt eine willkürliche Funktion von x; bezeichnet man ihn mit $F(x)$, so hat man nach der Formel von Taylor:

$$(3)\quad \begin{cases} u = F(x) + \frac{a F''(x)}{1!}(t - t_0) + \frac{a^2 F^4(x)}{2!}(t - t_0)^2 \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{a^3 F^6(x)}{3!}(t - t_0)^3 + \cdots, \end{cases}$$

ein Ausdruck, der eine einzige willkürliche Funktion $F(x)$ enthält.

Wir wollen nun u nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickeln, wobei x_0 eine willkürlich gewählte, bestimmte Gröſse ist. Die Gleichung (1) ergiebt:

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t},$$

ferner:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{a}\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial t},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{a}\frac{\partial \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial t^2} = \frac{1}{a^3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \cdots$$

Die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial x}$, welche zu $x = x_0$ gehören, bleiben hier willkürliche Funktionen von t; bezeichnet man sie mit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, so bestimmen die vorstehenden Gleichungen die Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \cdots$ und es wird nach der Formel von Taylor:

$$(5)\quad \begin{cases} u = \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{2!}\frac{(x - x_0)^2}{a} + \frac{\varphi''(t)}{4!}\frac{(x - x_0)^4}{a^2} + \cdots \\ \qquad + \frac{\psi(t)}{1!}(x - x_0) + \frac{\psi'(t)}{3!}\frac{(x - x_0)^3}{a} + \frac{\psi''(t)}{5!}\frac{(x - x_0)^5}{a^2} + \cdots \end{cases}$$

Dieser Ausdruck von u setzt sich aus zwei verschiedenen Reihen zusammen und enthält zwei willkürliche Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. Indessen ist die Formel (5) nicht allgemeiner als die Formel (3); Poisson hat gezeigt, daſs sich die beiden Gleichungen ineinander überführen lassen, wenn man voraussetzt, daſs die Reihen konvergent sind (*Théorie mathématique de la chaleur, p. 137*). Diese letztere Voraussetzung ist überhaupt eine Annahme, welche wir über die Beschaffenheit des Integrales gemacht haben, dieselbe ist aber keineswegs immer erfüllt für das allgemeinste Integral der Differentialgleichung (1).

872. Integration durch bestimmte Integrale. Anstatt die Integrale in Reihen zu entwickeln, kann man sie bisweilen auch zweckmäfsig durch bestimmte Integrale darstellen; wir beschränken uns dabei nur auf ein Beispiel für diese Methode und wählen wieder die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Indem wir auf dieselbe die Methode der Nr. 867 anwenden, ergiebt die Substitution von $e^{\alpha x + \beta t}$ für u:

$$\beta = a\alpha^2,$$

und folglich hat man als Lösung unserer Gleichung:

$$u = Ce^{a\alpha^2 t}e^{\alpha x} + C_1 e^{a\alpha_1^2 t}e^{\alpha_1 x} + \cdots,$$

welche eine unendliche Anzahl von willkürlichen Konstanten $C, C_1, \ldots \alpha, \alpha_1, \ldots$ enthält. Nun ist (Nr. 491):

$$e^{\alpha^2 a t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} e^{2\alpha\omega\sqrt{at}}\,d\omega,$$

also kann man schreiben:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2}\left[Ce^{\alpha(x+2\omega\sqrt{at})} + C_1 e^{\alpha_1(x+2\omega\sqrt{at})} + \cdots\right]d\omega.$$

Die Reihe

$$Ce^{\alpha x} + C_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots$$

kann eine willkürliche Funktion von e^x oder eine willkürliche Funktion von x darstellen; bezeichnet man dieselbe mit $F(x)$, so wird der Wert von u:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2\omega\sqrt{at})\,e^{-\omega^2}\,d\omega.$$

Dieser Ausdruck reduziert sich auf $F(x)$ für $t = 0$, er wird also mit der Formel (3) Nr. 871 identisch, wenn man dort $t_0 = 0$ setzt. Indessen mufs man bemerken, dafs die vorstehende Formel nur dann gilt, wenn $F(x)$ so beschaffen ist, dafs das Produkt $e^{-x^2}F(x)$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integrierbar ist (Nr. 469).

Die Untersuchung, von welcher wir hier nur einen Begriff geben wollten, ist für die Probleme der mathematischen Physik überaus wichtig. Die besonderen Schriften hierüber, wie das Werk von Poisson, enthalten viele Beispiele hierzu, so dafs wir es für überflüssig halten, auf weitere Entwickelungen hier einzugehen.

Neuntes Kapitel.

Variationsrechnung.

§ 1. Der einfachste Fall.

873. Die Aufgabe der Variationsrechnung. Die Variationsrechnung ist von Bernoulli, Euler und Lagrange ausgebildet worden, um gewisse Probleme des Maximums und Minimums von besonderer Art zu lösen; sie kann aber auch mit Erfolg für verschiedene andere Fragen angewandt werden. In den genannten Problemen des Maximums und Minimums handelt es sich um die Bestimmung von Funktionen einer unabhängigen Variabelen, für welche ein bestimmtes Integral, das von diesen Funktionen abhängt, ein Maximum oder Minimum wird. Wir geben hier als Beispiel:

Es soll eine ebene Kurve CMD gefunden werden, welche durch zwei gegebene Punkte C und D geht und die Eigenschaft hat, daſs die Fläche, welche durch den Bogen CD bei der Rotation um eine in der Ebene gelegene Achse erzeugt wird, ein Minimum ist.

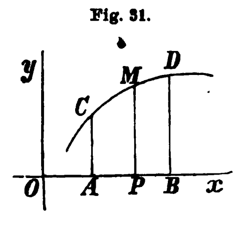


Fig. 31.

Wählt man zwei rechtwinklige Koordinatenachsen Ox, Oy, von denen die erste mit der Rotationsachse zusammenfällt, legt man ferner durch die Endpunkte CD die Ordinaten CA, DB und setzt $OA = x_0$, $OB = x_1$, so wird die von dem Bogen CD erzeugte Fläche gleich $2\pi S$, wobei S das Integral bezeichnet:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Es handelt sich hier also um das Problem: welches ist die Funktion von x, die man für y zu substituieren hat, damit der Wert von S ein Minimum wird?

Anstatt die Endpunkte C und D des gesuchten Bogens vorzuschreiben, kann man annehmen, dafs diese Punkte nur der Bedingung unterworfen sind, dafs sie auf zwei gegebenen Kurven liegen müssen; auch hier handelt es sich um das Minimum des Integrales S, doch sind die Grenzen x_0, x_1 nicht mehr von vornherein vollständig festgelegt.

874. Begriff der Variation. Um den Begriff der Variation zu erläutern, gehen wir von dem einfachsten Falle aus. Gegeben sei das Integral:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx, \tag{1}$$

in welchem V eine gegebene Funktion dreier Argumente und y eine Funktion von x bedeutet; V sei analytisch und regulär in dem Bereiche, in dem sich unsere Betrachtungen bewegen. Die Funktion y ist zunächst unbestimmt, wir denken uns aber verschiedene analytische Funktionen von x eingesetzt, die ebenfalls regulär sind. Die Gesamtheit der Funktionen y, die wir ins Auge fassen, nennen wir den *Funktionenbereich* (y); natürlich beschränken wir uns durchweg auf reelle Variabele. Es handelt sich nun darum, unter den Werten S, welche den Funktionen des Bereiches (y) entsprechen, die gröfsten oder kleinsten auszusuchen. Der Bereich ist dabei meist durch das Problem selbst gegeben, er mufs aber im Laufe der Betrachtungen in der Regel noch weiter eingeschränkt werden.

Wir greifen jetzt eine Schar von ∞^1 Kurven oder Funktionen heraus: $y = f(x, \alpha)$ mit dem kontinuierlich veränderlichen Parameter α und nehmen an, dafs sie ganz unserem Bereiche (y) angehört; f sei wieder eine reguläre analytische Funktion der beiden Argumente. Die Kurvenschar definiert einen Bereich (α), in welchem S eine Funktion $S(\alpha)$ von α wird. Wird insbesondere S für eine Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum im Bereiche (y), so können wir unendlich viele Kurvenscharen (α) bilden:

(2) $$y = f(x, \alpha) = f(x) + (\alpha - \alpha_0)\eta(x, \alpha),$$

deren jede für $\alpha = \alpha_0$ die betrachtete Kurve $y = f(x)$ ergiebt. Wir nehmen an, dafs alle diese Kurvenscharen für kleine Werte $\alpha - \alpha_0$ dem Bereiche (y) angehören, und dafs η regulär ist. Innerhalb jeder solchen Schar (α) mufs nun der Kurve $y = f(x)$ ebenfalls der gröfste oder kleinste Wert von S entsprechen, d. h. es mufs die Funktion $S = S(\alpha)$ für $\alpha = \alpha_0$ ein Maximum oder Minimum besitzen. Demnach wird (Nr. 142) die nach α genommene Ableitung an der Stelle $\alpha = \alpha_0$

(3) $$\left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha_0} = S'(\alpha_0) = 0,$$

wie wir auch unsere Kurvenschar (α) im Bereiche (y) ausgewählt haben. Den Ausdruck $S'(\alpha_0)$ bezeichnen wir als die *Variation* des Integrales S, die zu der Kurve $y = f(x)$ und der betrachteten Kurvenschar gehört. Wir sehen also:

Satz. *Wenn die Funktion $y = f(x)$ das Integral S innerhalb des Bereiches (y) zu einem Maximum oder Minimum macht, so wird die ihr entsprechende Variation $S'(\alpha_0)$* gleich Null *für alle Kurvenscharen (α) des Bereiches (y), die für $\alpha = \alpha_0$ in die Kurve $y = f(x)$ übergehen.*

875. Das Variationszeichen δ. Der Ausdruck $S'(\alpha_0)$ wird auch vielfach mit δS bezeichnet:

$$\delta S = S'(\alpha_0).$$

Haben wir ganz allgemein eine Funktion u des Parameters α, die wir in der Umgebung des Wertes $\alpha = \alpha_0$ betrachten und die aufserdem noch von irgendwelchen anderen Variabelen z. B. x abhängen kann, so bezeichnet man in der Variationsrechnung den Wert der partiellen Ableitung nach α an der Stelle $\alpha = \alpha_0$ mit δu:

(1) $$\delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_0}$$

und nennt ihn die Variation von u. So ist z. B. für unsere Kurvenschar (2):

$$\delta y = \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_0} = \eta(x, \alpha_0).$$

Entsprechend führt man die „Variationen zweiter und höherer Ordnung“ ein:

$$\delta^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha_0}, \quad \delta^3 u = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3}\right)_{\alpha_0}, \cdots$$

Im Gegensatz zu ihnen heifst δu die „erste Variation“. Wir werden uns aber im Folgenden auf sie allein beschränken und sie daher schlechtweg „die Variation“ nennen.

Das Variationszeichen δ ist sowohl mit dem Differentiationszeichen $\frac{d}{dx}$ als dem Integralzeichen $\int dx$ für jede von α unabhängige Veränderliche x vertauschbar.

Denn es ist (Nr. 68):

$$(2) \qquad \delta \frac{du}{dx} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{du}{dx}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \frac{d\delta u}{dx}.$$

Dabei ist zu beachten, dafs hier durchweg das Zeichen d sich auf die Änderung längs der Kurve $u = u(x, \alpha)$ bei konstantem α bezieht, während die Differentiation nach α bei konstantem x erfolgt und sich auf den Übergang von einer Kurve zur anderen bezieht. Einen solchen stetigen Übergang von Kurve zu Kurve wollen wir aber allgemein als ein „Variieren“ bezeichnen.

Ganz entsprechend ist, wenn die Grenzen x_0 und x von α unabhängig sind, nach Nr. 483:

$$(3) \qquad \delta \int_{x_0}^{x} u\,dx = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_0}^{x} u\,dx\right)_{\alpha_0} = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_0} dx = \int_{x_0}^{x} \delta u\,dx.$$

876. Darstellung der ersten Variation. Wir haben erkannt, dafs die Maxima und Minima des Ausdruckes

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

unter den angegebenen Voraussetzungen erhalten werden, wenn wir seine erste Variation gleich Null setzen:

$$(1) \qquad \delta S = \delta \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\,dx = 0.$$

Hier nehmen wir x als eine von α unabhängige Veränderliche an und beschränken uns zunächst auf den Fall, wo die Grenzen x_0 und x_1 des Integrales fest, d. h. gleichfalls von α unabhängig bleiben. Dann sind innerhalb jeder Kurvenschar (α) die beiden Funktionen y und y' Funktionen von x und α, und es ist nach (3) der vorigen Nummer:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \delta V(x, y, y')\, dx,$$

wo das Zeichen δ eine partielle Differentiation nach α bedeutet.

Es wird daher:

$$\delta V = Y \delta y + Y_1 \delta y', \tag{2}$$

wo Y und Y_1 die partiellen Ableitungen von V nach y und y' bezeichnen. Also wird:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} (Y \delta y + Y_1 \delta y')\, dx. \tag{3}$$

In dem zweiten Summanden können wir es durch teilweise Integration (Nr. 415) erreichen, dafs δy an Stelle von $\delta y'$ unter dem Integralzeichen erscheint. Es wird nämlich mit Hilfe von (2) der vorigen Nummer:

$$\int_{x_0}^{x_1} Y_1 \delta y'\, dx = \int_{x_0}^{x_1} Y_1 \frac{d \delta y}{dx}\, dx = [Y_1 \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_1' \delta y\, dx. \tag{4}$$

Dabei bedeutet die [eckige] Klammer, dafs der Wert von $Y_1 \delta y$ an der Stelle $x = x_1$ gebildet und um den Wert desselben Ausdruckes an der Stelle $x = x_0$ vermindert werden soll. Y_1' bedeutet die vollständige Ableitung von Y_1 nach x:

$$Y_1' = \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} y' + \frac{\partial Y_1}{\partial y'} y'',$$

Y_1' enthält also die Ableitungen von y bis zur zweiten Ordnung. Setzen wir den Ausdruck (4) in (3) ein, so finden wir:

$$\delta S = [Y_1 \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (Y - Y_1') \delta y\, dx. \tag{5}$$

Den Integranden rechts nennen wir den „Lagrangeschen Ausdruck" und setzen zur Abkürzung:

$$(6) \qquad L \equiv Y - Y_1'.$$

877. Die Lagrangesche Differentialgleichung. Wir wollen jetzt voraussetzen, daſs alle Funktionen y unseres Bereiches (y) im ganzen Integrationsintervall (x_0, x_1) mit Einschluſs der Grenzen stetig und differentiierbar sind, und daſs sie an den Grenzen x_0 und x_1 selbst vorgeschriebene feste Zahlenwerte y_0 und y_1 annehmen. Dann wird auch für jede Kurvenschar (α):

$$(1) \qquad f(x_0, \alpha) = y_0, \quad f(x_1, \alpha) = y_1$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_0, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1, \alpha) = 0,$$

d. h. die Variation $\delta y = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)$ muſs an beiden Grenzen den Wert 0 annehmen, und die Formel (5) der vorigen Nummer geht über in

$$(2) \qquad \delta S = \int_{x_0}^{x_1} L\, \delta y\, dx,$$

wo L die dort in (6) angegebene Bedeutung hat.

Bei dieser Umformung wird die Stetigkeit der ersten und die Existenz der zweiten Ableitung von y vorausgesetzt. Der Einfachheit halber nehmen wir ferner an, daſs die gesuchte Funktion y, die S zu einem Maximum oder Minimum machen soll, mit allen ihren Ableitungen im Integrationsintervall überall stetig ist. Dann genügt auch die zugehörige Funktion $L = L(x)$ den Stetigkeitsbedingungen des Bereiches (y), und es ist erlaubt, für die Kurvenschar (α) die folgende zu wählen:

$$(3) \qquad y = f(x, \alpha) = f(x) + \alpha (x - x_0)(x_1 - x) L,$$

welche in der That auch den Bedingungen (1) genügt und für $\alpha = 0$ die gesuchte Funktion $y = f(x)$ ergiebt. Somit haben wir nach (2) für diese Funktion y die folgende Bedingung:

$$(4) \qquad \delta S = \int_{x_0}^{x_1} L^2 (x - x_0)(x_1 - x)\, dx = 0,$$

denn nach Nr. 874 mufs die Variation δS verschwinden, und es ist in unserem Falle:

$$\delta y = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) = (x - x_0)(x_1 - x) L.$$

Es ist aber auch, wenn x irgend einen Wert zwischen x_0 und x_1 bedeutet, da der Integrandus im ganzen Intervall nicht negativ wird:

$$0 \leqq \int_{x_0}^{x} L^2 (x - x_0)(x_1 - x)\, dx \leqq \int_{x_0}^{x_1} L^2 (x - x_0)(x_1 - x)\, dx = 0,$$

also für jeden Wert x des Intervalles:

$$\int_{x_0}^{x} L^2 (x - x_0)(x_1 - x)\, dx = 0,$$

und durch Differentiation nach x folgt das Verschwinden des Integranden:

$$L^2 (x - x_0)(x_1 - x) = 0,$$

d. h.

$$L \equiv Y - Y_1' = Y - \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y} y' - \frac{\partial Y_1}{\partial y'} y'' = 0$$

oder auch:

$$(5) \qquad L \equiv \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0.$$

Diese Gleichung heifst die *Lagrangesche Differentialgleichung.*

Wir erkennen also:

Satz. *Die Funktionen $y = y(x)$, welche das Integral*

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\, dx$$

unter den gemachten Voraussetzungen zu einem Maximum oder Minimum machen, während für die Grenzen x_0 und x_1 die

Funktionswerte y_0 und y_1 vorgeschrieben sind, sind zu suchen unter den Lösungen der „Lagrangeschen Differentialgleichung":

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist von der zweiten Ordnung, y_0 und y_1 erscheinen als Integrationskonstanten.

Bevor wir nun zu Verallgemeinerungen übergehen, wollen wir das gewonnene wichtige Ergebnis auf einige spezielle Aufgaben anwenden und zwar zunächst auf das schon in Nr. 873 als Beispiel angegebene Problem.

878. Erstes Beispiel. Die minimale Rotationsfläche. *Es soll die ebene Kurve bestimmt werden, welche durch zwei gegebene Punkte geht, und welche bei ihrer Rotation um eine in der Ebene gegebene Achse eine Fläche von kleinster Oberfläche erzeugt.*

Wählt man zwei rechtwinklige Achsen in der Ebene, von denen die eine [x] mit der Rotationsachse zusammenfällt, so ist die Fläche, deren Minimum gesucht wird, gleich dem Produkt von 2π mit dem Integrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Also wird nach den allgemeinen Formeln der Nr. 876:

$$V = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad Y = \sqrt{1 + y'^2}, \quad Y_1 = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$L = \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yy''}{(\sqrt{1+y'^2})^3},$$

und die Lagrangesche Gleichung $L = 0$ nimmt die Form an:

$$1 + y'^2 - yy'' = 0$$

oder

$$\frac{y'}{y} - \frac{y\,y''}{1+y'^2} = \frac{d}{dx}ly - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}l(1 + y'^2) = 0$$

und liefert als erstes Integral:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Hieraus folgt:

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}}, \quad \text{also} \quad \frac{x-a}{c} = l\,\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c};$$

a und c sind willkürliche Konstanten. Man kann dies schreiben

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{\frac{x-a}{c}}, \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{-\frac{x-a}{c}};$$

also

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-a}{c}} + e^{-\frac{x-a}{c}}\right).$$

Dies ist die Gleichung einer *Kettenlinie* (Nr. 225) mit der Rotationsachse als „Leitlinie".

Sind die Endpunkte gegeben, so dient die Gleichung der Kurve zur Bestimmung der Konstanten c und a vermöge der Gleichungen:

$$y_0 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_0-a}{c}} + e^{-\frac{x_0-a}{c}}\right),$$

$$y_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1-a}{c}} + e^{-\frac{x_1-a}{c}}\right).$$

Nehmen wir z. B. an, daſs die Ordinaten dieser Endpunkte gleich sind, und wählen wir zur y-Achse die Senkrechte im gleichen Abstande zu diesen Punkten, so ist $x_1 = -x_0$; folglich wird die Konstante a Null und die Gleichung der Kurve:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Die Konstante c ist also aus der Bedingung:

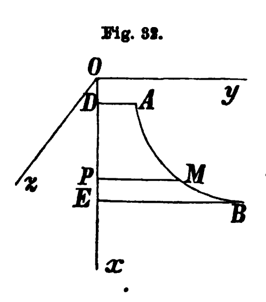
$$y_0 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_0}{c}} + e^{-\frac{x_0}{c}}\right)$$

zu bestimmen. Ist das Verhältnis $\frac{y_0}{x_0}$ kleiner als eine bestimmte Grenze k, welche angenähert $= 1{,}509$ ist, so hat die vorstehende Gleichung keine reelle Wurzel c; in diesem Falle existiert weder ein Maximum noch ein Minimum.

879. Zweites Beispiel. Die Brachistochrone. *Es seien zwei Punkte A und B in verschiedener Höhe gegeben; man soll die Kurve AMB finden, welche ein schwerer Punkt durchlaufen*

mufs, um bei reibungsloser Bewegung in der kürzesten Zeit von A nach B zu gelangen.

Die gesuchte Kurve heifst die *Brachistochrone.* Wir wählen rechtwinklige Achsen, von denen die x-Achse parallel zur Richtung der Schwere ist, und bezeichnen mit x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten der Punkte A und B. Die durch die Schwere verursachte Beschleunigung heifse g, die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ werde wie gewöhnlich mit y' und die Zeit mit t bezeichnet. Dann ist nach dem Prinzip der lebendigen Kraft:



$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2g(x - x_0)$$

oder

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{2g(x - x_0)}.$$

Hieraus folgt für die Zeitdauer $T = t_1 - t_0$ der Bewegung zwischen den Punkten A und B:

$$\sqrt{2g}\, T = S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{x - x_0}}\, dx.$$

Es handelt sich also um die Bedingungen des Minimums von S. Hier ist:

$$Y = 0, \quad Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{(x - x_0)(1 + y'^2)}}, \quad L = -\frac{dY_1}{dx}.$$

Also wird nach der Lagrangeschen Gleichung $L = 0$:

$$Y_1 = c = \text{const},$$

oder

$$y' = c\sqrt{(x - x_0)(1 + y'^2)}.$$

Löst man diese Gleichung nach y' auf, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x - x_0}{\frac{1}{c^2} - (x - x_0)}},$$

und dies ist die Differentialgleichung einer *Cykloide*, deren Basislinie horizontal ist (Nr. 232), und deren Gleichung sich nach Nr. 231 (1) in der Form schreiben läſst:

$$y - y_0 = a(\varphi - \sin\varphi),$$
$$x - x_0 = a(1 - \cos\varphi).$$

$2a = \frac{1}{c^2}$ ist der Durchmesser des erzeugenden Kreises und bestimmt sich durch die Bedingung, daſs die Kurve auch durch den Punkt B gehen soll, während dem Werte $\varphi = 0$ von selbst schon der Punkt A mit den Koordinaten x_0, y_0 entspricht.

Wir haben also zur Bestimmung von a die beiden Gleichungen:

$$y_1 - y_0 = a(\varphi_1 - \sin\varphi_1),$$
$$x_1 - x_0 = a(1 - \cos\varphi_1),$$

wenn der Punkt B dem Werte $\varphi = \varphi_1$ entsprechen soll. Durch Elimination von a folgt dann:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\varphi_1 - \sin\varphi_1}{1 - \cos\varphi_1}.$$

Diese Gleichung bestimmt, geometrisch interpretiert, den Schnittpunkt der Sehne AB mit einer speziellen Cykloide der betrachteten Schar, z. B. $a = 1$, und besitzt für alle positiven Werte der linken Seite eine und nur eine Wurzel φ_1 im Intervall $0 < \varphi_1 < 2\pi$. Denn die Funktion

$$f(\varphi) = \frac{\varphi - \sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$$

nimmt an den Grenzen des Intervalles die Werte an:

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(2\pi) = \infty,$$

und ihre Ableitung $f'(\varphi)$ ist positiv im ganzen Intervalle. In der That ist:

$$f'(\varphi) = \frac{(1 - \cos\varphi)^2 - \sin\varphi\,(\varphi - \sin\varphi)}{(1 - \cos\varphi)^2} = \frac{2(1 - \cos\varphi) - \varphi\sin\varphi}{(1 - \cos\varphi)^2} > 0,$$

da in der zweiten Hälfte $\pi < \varphi < 2\pi$ beide Glieder des Zählers positiv sind wegen $\sin\varphi < 0$, in der ersten Hälfte aber beständig

$$\frac{2(1 - \cos\varphi)}{\varphi\sin\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} > 1.$$

Ist nun $\varphi = \varphi_1$ der Wert, für den $f(\varphi)$ den vorgeschriebenen Wert $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ annimmt, so findet man unmittelbar:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{\varphi_1 - \sin\varphi_1} = \frac{x_1 - x_0}{1 - \cos\varphi_1} > 0,$$

der Radius a ist also gleichfalls immer eindeutig bestimmt.

Wir haben somit den Satz:

Sind A und B zwei Punkte einer Vertikalebene und B tiefer gelegen als A, so giebt es immer eine und nur eine Cykloide mit horizontaler Basislinie, welche in A ihre Spitze hat, durch B geht und die Brachistochrone zwischen den beiden Punkten darstellt.

§ 2. Verallgemeinerungen.

880. Mehrere unbekannte Funktionen. Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Funktion V unter dem Integralzeichen anstatt der einen unbekannten Funktion y *zwei* unbekannte Funktionen y und z der unabhängigen Veränderlichen x nebst ihren Ableitungen y' und z' enthält, wo also zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll ein Ausdruck der Form:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, z, y', z')\,dx. \tag{1}$$

Hier haben wir einen durch *Raumkurven* dargestellten Funktionenbereich (y, z) zu Grunde zu legen, und zum Zwecke der Variation betrachten wir innerhalb des Bereiches wieder eine einfache Schar (α) solcher Kurven:

$$\begin{aligned} y &= f(x, \alpha) = f(x) + (\alpha - \alpha_0)\eta(x, \alpha), \\ z &= g(x, \alpha) = g(x) + (\alpha - \alpha_0)\zeta(x, \alpha). \end{aligned} \tag{2}$$

Durch Differentiation nach α bei konstantem x erhalten wir ebenso wie in Nr. 876 für die „erste Variation":

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial z'}\delta z'\right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (Y\delta y + Z\delta z + Y_1\delta y' + Z_1\delta z')\,dx, \end{aligned} \tag{3}$$

ferner durch teilweise Integration wie in (5) derselben Nummer:

$$\delta S = [Y_1 \delta y + Z_1 \delta z]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (L\delta y + M\delta z)dx, \tag{4}$$

wo

$$L = Y - Y_1' = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'},$$

$$M = Z - Z_1' = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial z'} \text{ sein soll,}$$

und dieser Ausdruck δS mufs den Wert 0 haben für jede Kurve $y = f(x)$, $z = g(x)$, welche ein Maximum oder Minimum des Integrales liefert, und für alle dem Bereiche (y, z) angehörenden Variationen $\delta y = \eta$, $\delta z = \zeta$.

In dem einfachsten Falle, wo die Endpunkte der Raumkurven (y, z) durch die Bedingungen der Aufgabe vorgeschrieben sind:

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1,$$

also bei der Variation festgehalten werden müssen, ist wieder an beiden Grenzen $\delta y = 0$ und $\delta z = 0$, und indem wir einmal setzen:

$$\delta y = \eta(x) = (x - x_0)(x_1 - x)L, \quad \delta z = 0,$$

das andere Mal aber:

$$\delta y = 0, \quad \delta z = \zeta(x) = (x - x_0)(x_1 - x)M,$$

erhalten wir ganz analog wie in Nr. 877:

$$\int_{x_0}^{x_1} L^2(x - x_0)(x_1 - x)dx = 0, \quad \text{mithin} \quad L = 0$$

und

$$\int_{x_0}^{x_1} M^2(x - x_0)(x_1 - x)dx = 0, \quad \text{also} \quad M = 0.$$

Die gesuchte Raumkurve $y = y(x)$, $z = z(x)$ mufs also den *beiden* „Lagrangeschen Gleichungen" $L = 0$ und $M = 0$ gleichzeitig genügen. Dann verschwindet aber nach (4) in der That auch immer die erste Variation δS für alle Kurvenscharen (2) des betrachteten Bereiches.

Auch dieses Resultat wollen wir zunächst durch ein Beispiel erläutern.

881. Drittes Beispiel. Problem der kürzesten Linie. *Die kürzeste Raumkurve zwischen zwei Punkten zu finden.*

Es seien x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten der Endpunkte der gesuchten Linie in Bezug auf drei rechtwinklige Achsen. Die Länge dieser Linie wird dann:

$$(1)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Indem man alle früheren Bezeichnungen beibehält, ist hier:

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

ferner:

$$Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad Z_1 = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, welche die unbekannten Funktionen bestimmen, sind hier:

$$\frac{dY_1}{dx} = 0, \quad \frac{dZ_1}{dx} = 0,$$

woraus folgt:

$$Y_1 = \text{const}, \quad Z_1 = \text{const},$$

also:

$$y' = C, \quad z' = C'$$

und weiter:

$$(2)\qquad y = Cx + C_1, \quad z = C'x + C_1';$$

die gesuchte Linie ist also eine *Gerade*.

Die Konstanten C, C_1; C', C_1' werden durch die Bedingung bestimmt, dafs die Kurve durch die vorgeschriebenen Punkte hindurchgeht:

$$y_0 = Cx_0 + C_1, \quad z_0 = C'x_0 + C_1',$$

$$y_1 = Cx_1 + C_1, \quad z_1 = C'x_1 + C_1',$$

also:

$$C = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad C' = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0},$$

$$C_1 = \frac{y_0 x_1 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}, \quad C_1' = \frac{z_0 x_1 - x_0 z_1}{x_1 - x_0}.$$

882. Die Brachistochrone im Raume. In unserem zweiten Beispiele (Nr. 879) hatten wir die Linie kürzester Fallzeit ausschliefslich unter den *ebenen* Kurven, welche die gegebenen Punkte A und B verbinden, gesucht. Diese Beschränkung wollen wir nachträglich beseitigen, indem wir beweisen, dafs die Brachistochrone, falls sie existiert, notwendig eine ebene, vertikal stehende Kurve sein mufs. Legen wir wieder wie dort die x-Achse in die Richtung der Schwere, führen aber anstatt der einen jetzt *zwei* horizontale Koordinaten y und z ein, so ergiebt sich ganz analog nach dem Prinzip der lebendigen Kraft für die Fallzeit T zwischen den beiden Punkten:

$$\sqrt{2g}\,T = S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{x-x_0}}\,dx.$$

Hier ist in der Bezeichnungsweise von Nr. 880:

$$Y = Z = 0, \quad Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{(x-x_0)(1+y'^2+z'^2)}}, \quad Z_1 = \frac{z'}{\sqrt{(x-x_0)(1+y'^2+z'^2)}},$$

und die beiden Lagrangeschen Gleichungen werden:

$$\frac{dY_1}{dx} = 0, \quad \frac{dZ_1}{dx} = 0,$$

also:

$$y' = c\sqrt{(x-x_0)(1+y'^2+z'^2)}, \quad z' = c'\sqrt{(x-x_0)(1+y'^2+z'^2)},$$

wo c und c' Konstanten sind.

Hieraus folgt:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'} = \frac{c'}{c} = \text{const},$$

also:

$$z = \frac{c'}{c}\,y + c'',$$

d. h. die Brachistochrone liegt in einer Vertikalebene, und wenn wir die y-Achse in diese Ebene verlegen, so ergiebt sich nach Nr. 879, dafs die Kurve eine *Cykloide* sein mufs.

883. Höhere Ableitungen. Wir gehen jetzt zu dem Fall über, wo die Funktion V aufser x, y, y' noch höhere Ableitungen von y enthält. Es soll also zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden ein Ausdruck

$$(1)\qquad S=\int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})\,dx,$$

wobei wieder die Stetigkeit aller Ableitungen vorausgesetzt werden soll. An den Grenzen sei vorgeschrieben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x&=x_0,\ y=y_0,\ y'=y_0',\ \dots y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)},\\ x&=x_1,\ y=y_1,\ y'=y_1',\ \dots y^{(n-1)}=y_1^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die einparametrige Schar:

$$y=f(x)+(\alpha-\alpha_0)\,\eta(x),$$

wo

$$(3)\qquad \begin{aligned} \eta(x_0)&=\eta'(x_0)=\cdots=\eta^{(n-1)}(x_0)=0,\\ \eta(x_1)&=\eta'(x_1)=\cdots=\eta^{(n-1)}(x_1)=0. \end{aligned}$$

Hier ist wie in Nr. 875:

$$\delta y=\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\eta(x),$$

wenn allgemein das Zeichen δ die Operation $\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)_{\alpha_0}$ ausdrückt.

Dann folgt wie früher:

$$(4)\qquad \delta S=\int_{x_0}^{x_1}\delta V\,dx=\int_{x_0}^{x_1}(Y\delta y+Y_1\delta y'+\cdots+Y_n\delta y^{(n)})\,dx,$$

wo gesetzt ist:

$$Y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad Y_1=\frac{\partial V}{\partial y'},\dots\quad Y_n=\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}.$$

Es ist aber, wenn man ganz allgemein die totale Differentiation nach x durch die Accente andeutet:

$$\int_{x_0}^{x_1} Y_1\delta y'\,dx=[Y_1\delta y]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1} Y_1'\delta y\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} Y_2\delta y''\,dx=[Y_2\delta y']_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1} Y_2'\delta y'\,dx$$

$$=[Y_2\delta y'-Y_2'\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1} Y_2''\delta y\,dx.$$

Ebenso findet man successive durch teilweise Integration:

$$\int_{x_0}^{x_1} Y_3 \delta y''' dx = [Y_3 \delta y'' - Y_3' \delta y' + Y_3'' \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_3''' \delta y\, dx,$$

. . . .

$$\int_{x_0}^{x_1} Y_n \delta y^{(n)} dx = [Y_n \delta y^{(n-1)} - Y_n' \delta y^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1} Y_n^{(n-1)} \delta y]_{x_0}^{x_1}$$
$$+ (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} Y_n^{(n)} \delta y\, dx.$$

Also ist nach (4):

$$(5) \quad \delta S = [L_1 \delta y + L_2 \delta y' + \cdots + L_n \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} L \delta y\, dx,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$L = Y - Y_1' + - \cdots + (-1)^n Y_n^{(n)},$$
$$L_1 = Y_1 - Y_2' + \cdots \quad + (-1)^{n-1} Y_n^{(n-1)},$$
$$L_2 = Y_2 - Y_3' + \cdots \quad + (-1)^{n-2} Y_n^{(n-2)},$$
. . . .
$$L_n = Y_n.$$

Für $\delta y = \eta(x)$ verschwinden wegen (3) alle in [eckigen] Klammern stehenden „Grenzglieder", während sonst die Funktion $\eta(x)$ willkürlich bleibt. Wir dürfen also analog wie in Nr. 877 die folgende spezielle Variation einführen:

$$(6) \qquad \delta y = \eta(x) = (x - x_0)^n (x_1 - x)^n L.$$

Für den Fall eines Maximums oder Minimums ist daher wieder:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} L^2 (x - x_0)^n (x_1 - x)^n dx = 0$$

und wie in Nr. 877:

$$L = 0.$$

Eine Funktion $y = f(x)$, welche unter den Grenzbedingungen (2) das Integral S zu einem Maximum oder Minimum macht, erfüllt also die Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung:

(7) $$L \equiv Y - Y_1' + Y_2'' - \cdots + (-1)^n Y_n^{(n)}$$
$$\equiv \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial V}{\partial y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung wird von der Form sein:

(8) $$y = f(x, C_1, C_2, \ldots C_{2n}),$$

und die $2n$ Integrationskonstanten können dazu dienen, die $2n$ Grenzbedingungen (2) zu befriedigen:

$$y_0^{(i)} = f^{(i)}(x_0, C_1, C_2, \ldots C_{2n}),$$
$$y_1^{(i)} = f^{(i)}(x_1, C_1, C_2, \ldots C_{2n}).$$

884. Integration in besonderen Fällen. Wir setzen wie früher:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

und nehmen an, daſs V nur eine einzige Funktion y von x mit ihren beiden ersten nach x genommenen Ableitungen y', y'' enthält.

Es sei:

$$V = V(x, y, y', y''),$$

so daſs die unbekannte Funktion y von der Differentialgleichung

(1) $$Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2 Y_2}{dx^2} = 0$$

abhängt, welche im allgemeinen von der vierten Ordnung ist. Wir wollen hier einige Fälle angeben, in denen man unmittelbar eine oder zwei Integrationen ausführen kann.

1. Enthält V die Variabele y nicht, ist also $V = V(x, y', y'')$, so wird Y Null, und die Gleichung (1) reduziert sich auf

$$-\frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2 Y_2}{dx^2} = 0.$$

Integriert man diese und bezeichnet die Konstante mit C, so erhält man:

$$-Y_1 + \frac{dY_2}{dx} = C, \tag{2}$$

d. h. im allgemeinen eine Differentialgleichung dritter Ordnung. In derselben Weise kann man verfahren, wenn V die Gröfse y nur linear mit konstantem Koeffizienten enthält, denn alsdann ist Y konstant und somit:

$$Yx - Y_1 + \frac{dY_2}{dx} = C.$$

2. Nehmen wir an, dafs V die Variabele x nicht enthält, also dafs $V = V(y, y', y'')$ ist. Wenn dann die linke Seite der identischen Gleichung:

$$dV - (Ydy + Y_1 dy' + Y_2 dy'') = 0$$

zu der mit dy multiplizierten linken Seite von (1) addiert wird, so ergiebt sich:

$$dV - \left(Y_1 dy' + \frac{dY_1}{dx} dy\right) + \left(\frac{d^2 Y_2}{dx^2} dy - Y_2 dy''\right) = 0$$

oder weil $dy = y'dx$, $dy' = y''dx$ ist:

$$dV - \left(Y_1 \frac{dy'}{dx} + y' \frac{dY_1}{dx}\right) dx + \left(y'd\frac{dY_2}{dx} - Y_2 dy''\right) = 0.$$

Die linke Seite ist ein exaktes Differential, also ist:

$$V - y'\left(Y_1 - \frac{dY_2}{dx}\right) - Y_2 y'' = C. \tag{3}$$

3. Nehmen wir an, dafs V weder x noch y enthält, also $V = V(y', y'')$ ist. Es liegen hier also beide Fälle zugleich vor, die wir soeben behandelt haben, und man hat die beiden ersten Integrale der Gleichung (1):

$$-Y_1 + \frac{dY_2}{dx} = C', \quad V - y'\left(Y_1 - \frac{dY_2}{dx}\right) - Y_2 y'' = C,$$

wobei C und C' willkürliche Konstanten sind. Die Elimination des Gliedes $\frac{dY_2}{dx}$, das im allgemeinen allein die höchste Ableitung von y enthält, giebt also das zweite Integral:

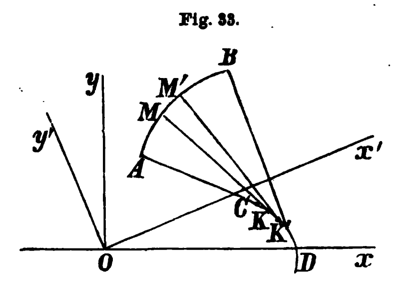
$$V = Y_2 y'' - C'y' + C. \tag{4}$$

885. Ein Beispiel von Euler für zweite Ableitungen. *Es soll eine ebene Kurve AMB gefunden werden, so dafs die Fläche $ABCD$ zwischen dem Bogen AMB, den Krümmungs-*

radien AC und BD, welche zu den Endpunkten A und B gehören, und dem Bogen CD der Evolute, der zwischen den Krümmungsmittelpunkten C und D enthalten ist, ein Minimum wird.

Es sei $MK = R$ der Krümmungsradius in einem Punkte M des Bogens $AM = s$, $M'K'$ ein benachbarter Krümmungsradius, so wird die zwischen den beiden Radien und den beiden Kurven enthaltene Fläche gleich $\frac{1}{2} R ds(1+\varepsilon)$, wobei ε beliebig klein wird. Bezieht man also die Kurve auf zwei rechtwinklige Achsen Ox und Oy, so ist das Integral, welches ein Minimum werden soll:

Fig. 33.



$$S = \int_{x_0}^{x_1} R \frac{ds}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^2}{y''} dx.$$

Also hat man:

$$V = \frac{(1+y'^2)^2}{y''}, \quad Y_2 = -\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

Da der dritte Fall der Nr. 884 vorliegt, so besitzt die Gleichung des Minimums das Integral:

$$V = C + C'y' + Y_2 y'',$$

und dieses Integral reduziert sich hier auf:

$$2V = C + C'y',$$

wobei C und C' willkürliche Konstanten sind, weil $Y_2 y'' = -V$ ist. Setzt man $R\frac{ds}{dx}$ an Stelle von V, $\frac{dy}{dx}$ an Stelle von y', so wird:

$$2R\frac{ds}{dx} = C + C'\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad 2R = C\frac{dx}{ds} + C'\frac{dy}{ds}.$$

Wir setzen

$$\frac{dx}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\varphi,$$

ferner

$$C = 8a\cos\alpha, \quad C' = -8a\sin\alpha,$$

wobei a und α neue willkürliche Konstanten sind, so wird:

$$R = 4a\sin(\varphi - \alpha).$$

Wenn man aber die Achsen um einen Winkel α dreht und immer mit φ die Neigung der Tangente der gesuchten Kurve gegen die y-Achse bezeichnet, so hat man einfach:

$$R = 4a \sin\varphi \quad \text{oder} \quad ds = 4a \sin\varphi\, d\varphi,$$

denn $d\varphi$ ist der Kontingenzwinkel. Also folgt:

$$dx = ds \sin\varphi = 4a \sin^2\varphi\, d\varphi = 2a(1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi,$$

$$dy = ds \cos\varphi = 4a \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 2a \sin 2\varphi\, d\varphi,$$

mithin, indem man integriert und mit x_0, y_0 neue willkürliche Konstanten bezeichnet:

$$x - x_0 = a(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y - y_0 = a(1 - \cos 2\varphi).$$

Die gesuchte Kurve ist sonach wieder eine *Cykloide* (Nr. 231).

886. Gleichzeitige Variation von x und y. In vielen Fällen ist es zweckmäſsig, die zwischen x und y bestehende Abhängigkeit vermittelst eines Parameters t auszudrücken:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Indem wir nun Kurvenscharen zu Grunde legen:

$$x = \varphi(t, \alpha), \quad y = \psi(t, \alpha),$$

wird auch $x = x(t)$ variierbar, d. h. nach α differentiierbar bei konstantem t. Im folgenden sollen die bei konstantem α genommenen Ableitungen nach t durch Accente und die entsprechenden nach x durch $D, D^2, \ldots$ ausgedrückt werden. Dann ist für jede Funktion u von x:

$$Du = \frac{u'}{x'},$$

δ bedeutet wie früher $\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)_{\alpha_0}$, wo α von t unabhängig sein soll. Es ist daher wie früher:

$$\delta u' = (\delta u)',$$

und man hat für jedes $u = u(t, \alpha)$:

$$D(\delta u - Du\,\delta x) = \frac{\delta u'}{x'} - Du\frac{\delta x'}{x'} - D^2u\,\delta x = \delta\frac{u'}{x'} - D^2u\,\delta x,$$

also:

$$D(\delta u - Du\,\delta x) = \delta Du - D^2u\,\delta x. \tag{1}$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$D^2(\delta u - Du\,\delta x) = D(\delta Du - D^2u\,\delta x)$$

also, wenn man in (1) u durch Du ersetzt:

$$D^2(\delta u - Du\,\delta x) = \delta D^2u - D^3u\,\delta x,$$

und man erhält successive:

$$\begin{aligned} D^3(\delta u - Du\,\delta x) &= \delta D^3u - D^4u\,\delta x, \\ D^4(\delta u - Du\,\delta x) &= \delta D^4u - D^5u\,\delta x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^r(\delta u - Du\,\delta x) &= \delta D^r u - D^{r+1}u\,\delta x. \end{aligned} \tag{2}$$

Definieren wir also:

$$\omega = \delta y - Dy\,\delta x,$$

so folgt aus (2) für $u = y$:

$$D^r\omega = \delta D^r y - D^{r+1}y\,\delta x. \tag{3}$$

Diese Beziehungen wollen wir auf Integrale der in Nr. 883 betrachteten Form anwenden.

Es sei gegeben die Funktion:

$$V = V(x, y, Dy, D^2y, \ldots D^n y).$$

Dann ist, wenn man die partiellen Ableitungen von V nach $x, y, Dy, \ldots D^n y$ mit $X, Y, Y_1, \ldots Y_n$ bezeichnet:

$$DV = X + YDy + Y_1 D^2y + \cdots + Y_n D^{n+1}y$$

und

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y_1\delta Dy + \cdots + Y_n\delta D^n y.$$

Also:

$$\delta V - DV\delta x = Y(\delta y - Dy\,\delta x) + Y_1(\delta Dy - D^2y\,\delta x) + \cdots$$
$$+ Y_n(\delta D^n y - D^{n+1}y\,\delta x)$$

und mit Benutzung von (3):

$$\delta V - DV\delta x = Y\omega + Y_1 D\omega + \cdots + Y_n D^n\omega. \tag{4}$$

Demnach wird:

$$\begin{aligned} \delta(Vx') &= x'\delta V + V\delta x' \\ &= x'DV\delta x + (Y\omega + Y_1 D\omega + \cdots + Y_n D^n\omega)x' + V\delta x' \\ &= (V\delta x)' + (Y\omega + Y_1 D\omega + \cdots + Y_n D^n\omega)x', \end{aligned}$$

da
$$x' D V = V',$$
also
$$x' D V \delta x + V \delta x' = (V \delta x)'$$
ist.

Betrachtet man also das Integral:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{t_0}^{t_1} V x' dt,$$

so wird:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta(V x') dt = [V \delta x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (Y\omega + Y_1 D\omega + \cdots + Y_n D^n \omega) x' dt$$

oder:

$$(5) \quad \delta S = [V \delta x]_{x=x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (Y\omega + Y_1 D\omega + \cdots + Y_n D^n \omega) dx.$$

Hier hat der Integrandus dieselbe Form wie in (4) der Nr. 883, nur daſs jetzt ω an Stelle von δy tritt und entsprechend $D\omega, \ldots D^n \omega$ an Stelle von $\delta y', \ldots \delta y^{(n)}$. Es folgt also durch genau dieselbe Rechnung wie dort, nämlich durch successive teilweise Integration nach x:

$$(6) \quad \delta S = [V \delta x + L_1 \omega + L_2 D\omega + \cdots + L_n D^{n-1} \omega]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} L \omega \, dx$$

$$= [V \delta x + L_1 \omega + \cdots + L_n D^{n-1} \omega]_{t=t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} L \omega x' dt,$$

wo

$$L = Y - D Y_1 + D^2 Y_2 - \cdots + (-1)^n D^n Y_n,$$
$$L_1 = Y_1 - D Y_2 + D^2 Y_3 - \cdots + (-1)^{n-1} D^{n-1} Y_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_n = Y_n.$$

Zur Auffindung der Maxima und Minima des Integrales S betrachten wir die Kurvenschar:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= \varphi(t) - \alpha \psi'(t) \eta(t) \\ y &= \psi(t) + \alpha \varphi'(t) \eta(t), \end{aligned}$$

wo $\alpha = \alpha_0 = 0$ der gesuchten Kurve: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ entsprechen soll. Hier wird:

$$\delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_0 = -\psi'(t)\eta(t) = -y'\eta(t),$$

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 = \varphi'(t)\eta(t) = x'\eta(t)$$

und nach (3):

$$x'\omega = x'\delta y - y'\delta x = (x'^2 + y'^2)\eta(t).$$

Im einfachsten Falle, wo an beiden Grenzen $t = t_0$ und $t = t_1$ die Werte von $x, y, Dy, \dots D^{n-1}y$ sämtlich vorgeschrieben sind, müssen die Variationen dieser Gröfsen und damit wegen (3) auch die Werte $\omega, D\omega, \dots D^{n-1}\omega$ an beiden Grenzen verschwinden, und man erhält:

$$(8) \qquad \delta S = \int_{t_0}^{t_1} L\eta(t)(x'^2 + y'^2)\,dt = 0.$$

Setzt man hier wieder analog wie in Nr. 883:

$$\eta(t) = (t - t_0)^n (t_1 - t)^n L,$$

wodurch die „Grenzbedingungen“ gewifs befriedigt werden, so ist der Integrandus wieder nur positiver Werte fähig, und man schliefst wie dort auf das Bestehen der Differentialgleichung:

$$(9) \qquad L \equiv Y - DY_1 + D^2 Y_2 - + \cdots + (-1)^n D^n Y_n = 0.$$

Bei dieser zweiten Herleitung der Differentialgleichung wurde nicht wie bei der ersten vorausgesetzt, dafs y eine *eindeutige* Funktion von x sein sollte, wenn sich nur die beiden Variabelen als eindeutige Funktionen eines Parameters t darstellen lassen.

Alle hier angestellten Betrachtungen und Rechnungen lassen sich wie in Nr. 880 leicht auf den Fall mehrerer unbekannter Funktionen ausdehnen.

887. Variation der Grenzen. Bisher hatten wir uns auf solche Probleme beschränkt, wo zwischen festen Grenzen variiert wurde, d. h. die gesuchte Kurve, sowie alle zum Vergleich herangezogenen Kurven unseres Funktionen-Bereiches sollten durch zwei gegebene Endpunkte gehen, zwischen denen die Integration zu erstrecken war, und im Falle höherer Ableitungen sollten auch die sämtlichen Ausdrücke

Dy, $D^2y, \ldots D^{n-1}y$ an beiden Grenzen vorgeschriebene Werte annehmen. Die gleichzeitige Variation der beiden Veränderlichen x und y gestattet uns aber auch die Behandlung von Fällen, wo die Endpunkte der Integration anderen und allgemeineren „Grenzbedingungen" genügen, z. B. die Lösung der Aufgabe, die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei gegebenen *Kurven* zu finden.

Das Verfahren ist zunächst dasselbe wie in den früheren Fällen: aus der Gesamtheit der „erlaubten" Kurven greifen wir eine einparametrige Schar (α) heraus, unter denen die gesuchte gleichfalls das Maximum oder Minimum des Integrales liefern mufs. Durch Differentiation nach dem Parameter α erhalten wir wie früher als notwendige Bedingung das Verschwinden der „ersten Variation":

$$\delta S = \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha_0} = 0,$$

also nach (6) in Nr. 886 die Gleichung:

$$(1)\quad \begin{aligned} \delta S &= [V\delta x + L_1\omega + \cdots + L_n D^{n-1}\omega]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} L\omega\, dx \\ &= \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} L\omega\, dx = 0, \end{aligned}$$

wenn die Zeichen $V, L, L_1, \ldots L_n, D, \omega$ die dort angegebene Bedeutung haben und Γ_0, Γ_1 die Werte des eingeklammerten Ausdruckes:

$$\begin{aligned} \Gamma &= V\delta x + L_1\omega + L_2 D\omega + \cdots + L_n D^{n-1}\omega \\ &= V\delta x + L_1(\delta y - Dy\delta x) + \cdots + L_n(\delta D^{n-1}y - D^n y\delta x) \end{aligned}$$

an den beiden Endpunkten 0 und 1, wo $t = t_0$ oder $t = t_1$ ist, bezeichnen.

Unsere „Grenzbedingungen" seien nun von der Form, dafs zwischen den Werten:

$$\begin{gathered} x_0, y_0, Dy_0, \ldots D^{n-1}y_0, \\ x_1, y_1, Dy_1, \ldots D^{n-1}y_1, \end{gathered}$$

welche die Gröfsen $x, y, Dy, \ldots D^{n-1}y$ an den beiden Endpunkten 0 und 1 annehmen, ein System von Gleichungen besteht:

$$M = 0, \quad N = 0, \quad R = 0, \cdots \tag{2}$$

deren Anzahl m aber $2n$ nicht überschreiten darf.

Diesen Bedingungen mufs nun die gesuchte Kurve $y = f(x)$, welche das Minimum liefern soll, jedenfalls genügen und damit auch alle solchen Kurven, welche an den Endpunkten dieselben Werte von $x, y, \ldots, D^{n-1}y$ besitzen.

Es wird demnach unbeschadet der Grenzbedingungen (2) auch eine stetige Variation bei festgehaltenen Grenzwerten, wie sie in Nr. 886 eingeführt wurde, ebenfalls erlaubt sein und durch Benutzung der dort verwendeten speziellen Variation schliefsen wir wieder auf das Bestehen der Lagrangeschen Differentialgleichung

$$L = 0$$

für die gesuchte Kurve. Dann mufs aber das Integral $\int L\omega\, dx$ auch für *jede andere* Variation, die von der betrachteten Kurve ausgeht, gleichfalls identisch verschwinden, und wir haben für jede erlaubte Variation:

$$\begin{aligned} \delta S = \Gamma_1 - \Gamma_0 = \left[V\delta x + L_1\omega + \cdots + L_n D^{n-1}\omega\right]_0^1 \\ = (V^{(1)} - L_1^{(1)} Dy_1 \cdots - L_n^{(1)} D^n y_1)\delta x_1 \\ + L_1^{(1)}\delta y_1 + \cdots + L_n^{(1)}\delta D^{n-1} y_1 \\ - (V^{(0)} - L_1^{(0)} Dy_0 \cdots - L_n^{(0)} D^n y_0)\delta x_0 \\ - L_1^{(0)}\delta y_0 \cdots - L_n^{(0)}\delta D^{n-1} y_0 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Nun gelten die Grenzbedingungen (2) allgemein für alle Kurven der betrachteten Schar, man darf diese Gleichungen also auch „variieren", d. h. nach dem Parameter α differentiieren und erhält:

$$\begin{aligned} \delta M = \frac{\partial M}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial M}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial M}{\partial D y_0}\delta D y_0 + \cdots \\ + \frac{\partial M}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial M}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial M}{\partial D y_1}\delta D y_1 + \cdots = 0, \\ \delta N = 0, \quad \delta R = 0 \text{ u. s. w.}, \end{aligned} \tag{4}$$

also m lineare und homogene Gleichungen zwischen den $2n+2$ Gröſsen:

$$(5)\qquad \begin{array}{l} \delta x_0,\ \delta y_0,\ \delta D y_0, \ldots, \delta D^{n-1} y_0, \\ \delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta D y_1, \ldots, \delta D^{n-1} y_1. \end{array}$$

Könnten wir nun beweisen, daſs zu jedem solchen Wertesystem (5), das den Gleichungen (4) genügt, auch immer eine Kurvenschar (α) gefunden werden kann, welche für jeden Wert α eines gewissen Intervalles den Bedingungen (2), sowie den Stetigkeitsbedingungen genügt, für $\alpha = 0$ die vorgelegte Lösung der Lagrangeschen Differentialgleichung ergiebt und an den Grenzen 0 und 1 die Variationen (5) liefert, so könnten wir in der angegebenen Weise auf das gleichzeitige Bestehen des Gleichungssystemes (3) für dieselben Werte (5) schlieſsen und hätten damit die Bedingung $\delta S = 0$ auf ein rein algebraisches Problem zurückgeführt. Wir könnten dann ebenso wie in Nr. 166 bei der Theorie der einfachen Maxima und Minima „Lagrangesche Faktoren" $\mu, \nu, \varrho, \ldots$ einführen und in der Gleichung:

$$(6)\qquad \Gamma_1 - \Gamma_0 + \mu \delta M + \nu \delta N + \varrho \delta R + \cdots = 0$$

die $2n+2$ Koeffizienten der Gröſsen (5) gleich Null setzen, um die sämtlichen zu den Gleichungen (2) hinzutretenden Bedingungen zu erhalten, welchen die betrachtete Lösung der Differentialgleichung vermöge $\delta S = 0$ an den Integrationsgrenzen genügen muſs. Da aber der hier verlangte Nachweis für die Existenz einer solchen Kurvenschar (α) nicht ganz einfach ist, so wollen wir uns lieber auf einen in seinen Anwendungen besonders wichtigen Spezialfall beschränken.

888. Durchführung der Untersuchung für einen Spezialfall. Wir wollen voraussetzen, daſs der eine der beiden Endpunkte der Integration auf einer vorgeschriebenen *Kurve* variiert, während der andere vorläufig fest bleibt, und beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall $n = 1$, wo der Integrand nur die erste Ableitung von y enthält.

Dann reduzieren sich die Bedingungen (2) der vorigen Nummer auf die folgende Gleichung der „Grenzkurve":

$$(2)' \qquad M(x_1, y_1) = 0$$

und die Gleichung (3) geht über in:

$$(3)' \qquad \delta S = \Gamma_1 = (V^{(1)} - Y_1^{(1)} D y_1)\delta x_1 + Y_1^{(1)} \delta y_1 = 0,$$

während wegen der Voraussetzungen $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$ alle Glieder von Γ_0 verschwinden. Nehmen wir nun an,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

sei die gesuchte Kurve, welche der Lagrangeschen Differentialgleichung genügt und das Maximum oder Minimum liefern soll, und ihre Endpunkte, die den Werten $t = t_0$ und $t = t_1$ entsprechen, seien mit x_0, y_0 und x_1, y_1 bezeichnet, so können wir in unserem Spezialfalle eine geeignete Kurvenschar (α) leicht bestimmen. Die Gleichung der Grenzkurve (2)′ können wir nämlich auch in der Form schreiben:

$$x = g(\alpha), \quad y = h(\alpha),$$

wobei dem Werte $\alpha = 0$ des Parameters der Endpunkt x_1, y_1 der gesuchten Kurve entsprechen möge. Dann stellen die Gleichungen

$$x = \varphi(t) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}(g(\alpha) - x_1),$$

$$y = \psi(t) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}(h(\alpha) - y_1)$$

in der That eine Schar von Kurven dar, welche für $t = t_0$ den festen Anfangspunkt $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$ und für $t = t_1$ den variabelen Endpunkt $x = g(\alpha)$, $y = h(\alpha)$ besitzen und für $\alpha = 0$ in die ursprüngliche Kurve übergehen.

Ferner wird

$$\delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} g'(0) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \delta x_1,$$

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} h'(0) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \delta y_1,$$

so daſs δx und δy für $t = t_1$ in der That in δx_1 und δy_1 übergehen. Also gilt (3)′ für die Werte:

$$\delta x_1 = g'(0), \quad \delta y_1 = h'(0),$$

welche nach (2)′ durch die Bedingung verbunden sind:

$$(4)' \qquad \delta M = \frac{\partial M}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial M}{\partial y_1}\delta y_1 = 0,$$

und durch Elimination von δx_1, δy_1 aus $(3)'$ und $(4)'$ erhalten wir:

$$(5)_1 \qquad (V - Y_1 Dy_1)\frac{\partial M}{\partial y_1} - Y_1\frac{\partial M}{\partial x_1} = 0$$

als eine neue Bedingung, welche an dem Endpunkte 1 der gesuchten Kurve, d. h. für

$$x = x_1 = \varphi(t_1), \quad y = y_1 = \psi(t_1), \quad Dy = Dy_1 = \frac{\psi'(t_1)}{\varphi'(t_1)}$$

gelten mufs.

Im Falle, wo der *untere* Grenzpunkt 0 auf einer gegebenen Kurve $N(x_0, y_0) = 0$ variiert, während 1 festbleibt, erhalten wir durch genau dieselben Schlüsse die analoge Grenzbedingung:

$$(5)_0 \qquad (V - Y_1 Dy_0)\frac{\partial N}{\partial y_0} - Y_1\frac{\partial N}{\partial x_0}$$

ür

$$x = x_0 = \varphi(t_0), \quad y = y_0 = \psi(t_0), \quad Dy = Dy_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Sollten *beide* Grenzpunkte 0 und 1 gleichzeitig auf zwei Kurven $M = 0$, $N = 0$ variieren, so kann man einmal den einen, dann den anderen bei der Variation festhalten und schliefst so auf das simultane Bestehen der Gleichungen $(5)_1$ und $(5)_0$. In jedem Falle erhält man *zwei* Grenzbedingungen, die zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten der Lagrangeschen Gleichung dienen können.

889. Anwendung auf einige Beispiele. Ein Teil der früher behandelten Beispiele (Nr. 878, 879) bezog sich auf Integrale der Form:

$$S = \int U(x, y)\,ds = \int U(x, y)\sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= \int U(x, y)\sqrt{1 + Dy^2}\,dx,$$

wo die Ableitung Dy nur im Differential der Bogenlänge erscheint. Für jedes solche Integral wird:

$$V = U\sqrt{1+Dy^2} = U\frac{ds}{dx}, \quad Y_1 = U\frac{Dy}{\sqrt{1+Dy^2}} = U\frac{dy}{ds},$$

$$V - Y_1 Dy = U\left(\sqrt{1+Dy^2} - \frac{Dy^2}{\sqrt{1+Dy^2}}\right) = \frac{U}{\sqrt{1+Dy^2}} = U\frac{dx}{ds},$$

und die Bedingung $(3)'$ geht nach Division durch $U(x_1, y_1)$ über in:

$$(3)_1' \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 = 0,$$

ebenso die äquivalente Bedingung $(5)_1$ in:

$$(5)_1' \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \frac{\partial M}{\partial y_1} - \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0,$$

d. h. *die gesuchte Kurve* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *welche der Lagrangeschen Differentialgleichung genügt, mufs mit der vorgeschriebenen Grenzkurve* $M = 0$ *einen rechten Winkel bilden.*

Wenden wir unser Ergebnis auf den Fall:

$$U = 1, \quad S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

also auf das im Anfang von Nr. 887 erwähnte Problem der kürzesten Linie in der Ebene an, so erhalten wir z. B. den Satz:

Die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei ebenen Kurven ist eine Gerade, welche auf beiden Kurven senkrecht steht, also eine gemeinsame Normale.

Dieser Satz gilt aber auch für Raumkurven, also für das in Nr. 881 behandelte Beispiel mit zwei unbekannten Funktionen, wie wir jetzt zeigen wollen.

890. Ausdehnung auf zwei unbekannte Funktionen. Sind in einem Integrale von der in Nr. 880 betrachteten Form:

$$(1) \quad S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, z, Dy, Dz)\,dx \quad \left(Dy = \frac{dy}{dx},\ Dz = \frac{dz}{dx}\right)$$

auch die Grenzpunkte 0, 1 variabel, so kann man wieder alle drei Koordinaten x, y, z für jede Raumkurve als Funktionen von t auffassen und erhält durch Variation längs einer Kurvenschar (α) ganz analog wie in Nr. 886:

$$\delta S = [V\delta x + Y_1(\delta y - Dy\delta x) + Z_1(\delta z - Dz\delta x)]_0^1$$

(2)

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [L(\delta y - Dy\delta x) + M(\delta z - Dz\delta x)]x'\,dt,$$

wo

$$Y_1 = \frac{\partial V}{\partial Dy}, \quad Z_1 = \frac{\partial V}{\partial Dz}$$

ist und L, M die in Nr. 880 angegebene Bedeutung haben. Wie in Nr. 887 kann man hier zunächst bei *festen* Grenzpunkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 variieren und schliefst, wie in Nr. 880, wieder auf das Bestehen der beiden Lagrangeschen Differentialgleichungen:

(3) $$L = 0, \quad M = 0,$$

wodurch sich die erste Variation reduziert auf:

$$\delta S = \Gamma_1 - \Gamma_0 = [(V - Y_1 Dy - Z_1 Dz)\delta x + Y_1\delta y + Z_1\delta z]_0^1.$$

Läfst man nur den einen Endpunkt 1 längs einer Kurve variieren:

$$x = g(\alpha), \quad y = h(\alpha), \quad z = l(\alpha),$$

so kann man wieder die Kurvenschar betrachten:

$$x = \varphi(t) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}[g(\alpha) - x_1],$$

$$y = \psi(t) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}[h(\alpha) - y_1],$$

$$z = \chi(t) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}[l(\alpha) - z_1],$$

welche für $\alpha = 0$ wegen

$$g(0) = x_1, \quad h(0) = y_1, \quad l(0) = z_1$$

die gesuchte Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

mit dem Endpunkt x_1, y_1, z_1 ergiebt, und erhält:

(4) $$\delta S = \Gamma_1 = (V^{(1)} - Y_1^{(1)} Dy_1 - Z_1^{(1)} Dz_1)\delta x_1 + Y_1^{(1)}\delta y_1 + Z_1^{(1)}\delta z_1 = 0$$

für alle erlaubten Variationen δx_1, δy_1, δz_1 des Endpunktes 1.

Hier ist aber

$$\delta x_1 = g'(0), \quad \delta y_1 = h'(0), \quad \delta z_1 = l'(0),$$

so daſs wir schlieſslich als Grenzbedingung erhalten:

$$(4)' \quad (V^{(1)} - Y_1^{(1)} Dy_1 - Z_1^{(1)} Dz_1)\, g'(0) + Y_1^{(1)} h'(0) + Z_1^{(1)} l'(0) = 0,$$

wo Dy_1 und Dz_1 die Werte der im Punkte 1 längs der gesuchten Kurve genommenen Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, also die Werte $\frac{\psi'(t_1)}{\varphi'(t_1)}$ und $\frac{\chi'(t_1)}{\varphi'(t_1)}$ bedeuten.

Soll der Endpunkt 1 statt auf einer Raumkurve auf einer *Fläche*

$$F(x, y, z) = 0$$

frei beweglich sein, so darf auf jeder beliebigen Kurve dieser Fläche variiert werden, und die Variationen δx_1, δy_1, δz_1 sind an die einzige Bedingung geknüpft:

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1 = 0.$$

Man erhält also *zwei* Grenzbedingungen, indem man z. B. δz_1 durch δx_1 und δy_1 ausdrückt, in (4) einführt und dann die Koeffizienten von δy_1 und δz_1 einzeln $= 0$ setzt.

In dem Spezialfalle, wo analog wie in Nr. 889

$$V = U(x, y, z)\sqrt{1 + Dy^2 + Dz^2} = U\frac{ds}{dx}$$

ist, haben wir

$$Y_1 = U\frac{dy}{ds}, \quad Z_1 = U\frac{dz}{ds}$$

und

$$V - Y_1 Dy - Z_1 Dz = U\left(\frac{ds}{dx} - \frac{dy}{ds}\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{ds}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$= U\frac{ds}{dx}\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = U\frac{dx}{ds},$$

so daſs die Bedingung (4) übergeht in

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0$$

und wieder die *Orthogonalität* der gesuchten Kurve auf der vorgeschriebenen Grenzfläche oder Raumkurve ausdrückt.

§ 3. Probleme mit Nebenbedingungen.

891. Isoperimetrische Probleme. Sucht man unter allen geschlossenen ebenen Kurven von gegebenem Umfange diejenige, welche den gröfsten Inhalt einschliefst, so ist bekanntlich der Kreis die gesuchte Kurve. Es handelt sich hierbei um ein Problem der Variationsrechnung, bei welchem ein Integral zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, während *ein anderes Integral einen vorgeschriebenen Wert hat.* Man nennt daher im Hinblick auf die eben angedeutete geometrische Aufgabe allgemein Probleme dieser Art *isoperimetrische;* sie bilden eine besondere Klasse der *relativen* Variationsprobleme im Gegensatz zu den *absoluten,* bei denen keine *Nebenbedingungen* auftreten. Wir geben jetzt eine allgemeine Theorie derselben und werden später als Anwendung auch das eben genannte Beispiel behandeln.

Es sei

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

das Integral, das zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, während das zweite Integral

$$T = \int_{x_0}^{x_1} W(x, y, y')\,dx = l \tag{2}$$

den vorgeschriebenen Wert l hat. Wieder sollen V und W gegebene analytische Funktionen ihrer Argumente sein, die sich in dem Bereiche, in dem sich unsere Betrachtungen bewegen, regulär verhalten, und unter allen Funktionen $y = y(x)$, die den in Nr. 877 angegebenen Bedingungen und der Gleichung (2) genügen, sowie an den Grenzen x_0 und x_1 vorgeschriebene Werte y_0 und y_1 annehmen, soll diejenige $y = f(x)$ gefunden werden, welche S zu einem Maximum oder Minimum macht. Auf diesen einfachsten Fall isoperimetrischer Probleme wollen wir zunächst unsere Entwickelungen beschränken.

892. Der Lagrangesche Faktor. Wir betrachten eine zweifach unendliche Kurvenschar

$$y = f(x) + \alpha\eta(x) + \beta\vartheta(x) \tag{3}$$

mit den Parametern α und β, wo η und ϑ unseren Stetigkeitsbedingungen genügen und beide sowohl für $x = x_0$ als für $x = x_1$ verschwinden sollen:

$$(4) \qquad \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0, \quad \vartheta(x_0) = \vartheta(x_1) = 0,$$

so dafs unsere Schar allen gestellten Forderungen genügt, aufser der Nebenbedingung (2).

Denken wir uns jetzt die Funktionen η und ϑ fixiert und für y seinen Wert aus (3) eingesetzt, so werden S und T analytische Funktionen von α und β. Wir erfüllen nun auch die Gleichung (2), wenn wir aus der zweifach unendlichen Kurvenschar (3) die ∞^1 Kurven aussondern, für welche $T(\alpha, \beta) = l$ wird. Für $\alpha = 0$, $\beta = 0$ liefert (3) die gesuchte Kurve $y = f(x)$, und diese erfüllt nach Voraussetzung die Bedingung (2). Wir haben also die Gleichung:

$$(2a) \qquad T(\alpha, \beta) = T(0, 0) = l,$$

welche β als implicite Funktion von α definiert. An der Stelle $\alpha = 0$, $\beta = 0$ verhält sich T regulär. Ist also an derselben Stelle

$$(5) \qquad \frac{\partial T}{\partial \beta} \neq 0,$$

so wird β eine analytische Funktion von α, die in der Umgebung von $\alpha = 0$ regulär ist, für $\alpha = 0$ verschwindet und unsere Bedingung (2a) von selbst erfüllt (Nr. 661). Setzen wir diese Funktion $\beta = \beta(\alpha)$ in (1) ein, so wird S eine Funktion $S(\alpha)$ von α allein, welche für $\alpha = 0$ ihren gröfsten oder kleinsten Wert annehmen soll.

Wir haben daher an der Stelle $\alpha = 0$, $\beta = 0$:

$$(6) \qquad \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_0 + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_0 \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_0 = 0$$

und erhalten gleichzeitig durch Differentiation von (2a) an derselben Stelle:

$$(7) \qquad \left(\frac{dT}{d\alpha}\right)_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)_0 \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_0 = 0.$$

Nun ist aber wegen (3):

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial V}{\partial y'}\eta'(x)\right) dx = \delta S, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial W}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial W}{\partial y'}\eta'(x)\right) dx = \delta T, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\vartheta(x) + \frac{\partial V}{\partial y'}\vartheta'(x)\right) dx = \delta' S, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial W}{\partial y}\vartheta(x) + \frac{\partial W}{\partial y'}\vartheta'(x)\right) dx = \delta' T, \end{cases}$$

wo in den Funktionen V, W und ihren Ableitungen für y und y' immer $f(x)$ und $f'(x)$ zu denken sind. Hier entsprechen die Bezeichnungen δS, δT der in Nr. 875 eingeführten Definition der „ersten Variation", wenn man $\delta y = \eta(x)$ annimmt, und ebenso entstehen $\delta' S$, $\delta' T$, wenn man statt dessen die Variation $\delta' y = \vartheta(x)$ zu Grunde legt.

Wir haben also nach (6) und (7):

$$(6\text{a})\qquad \delta S + \delta' S \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_0 = 0,$$

$$(7\text{a})\qquad \delta T + \delta' T \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_0 = 0,$$

während nach (5)

$$\delta' T \neq 0$$

vorausgesetzt wird.

Setzen wir daher $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_0$ aus (7a) in (6a) ein, so erhalten wir:

$$\delta S - \frac{\delta' S}{\delta' T}\delta T = 0,$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$(9)\qquad \frac{\delta' S}{\delta' T} = -\lambda$$

gesetzt wird:

$$(10)\qquad \delta S + \lambda \delta T = 0.$$

Führen wir jetzt für δS und δT ihre Ausdrücke aus (8) ein und beachten, daſs λ eine von x unabhängige Konstante ist, so wird

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial y'}\eta' + \lambda\left(\frac{\partial W}{\partial y}\eta + \frac{\partial W}{\partial y'}\eta'\right)\right]dx = 0,$$

oder

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial(V+\lambda W)}{\partial y}\eta + \frac{\partial(V+\lambda W)}{\partial y'}\eta'\right)dx = 0,$$

und indem wir λ auch bei der Variation als Konstante behandeln, können wir auch abgekürzt schreiben:

$$\delta(S + \lambda T) = 0. \tag{10a}$$

Es gilt also genau dieselbe Bedingung, als ob das Integral

$$S^* = S + \lambda T = \int_{x_0}^{x_1}(V + \lambda W)\,dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum gemacht werden sollte, worin λ eine vorläufig noch unbekannte Konstante darstellt.

Um nun die Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $y = f(x)$ zu erhalten, beachten wir, daſs die Variation $\delta y = \eta(x)$ abgesehen von unseren Stetigkeitsbedingungen und von den Grenzbedingungen (4) noch vollkommen willkürlich ist, wir erhalten also durch genau dieselbe Schluſsweise wie in Nr. 877 die Beziehung:

$$\frac{\partial(V+\lambda W)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(V+\lambda W)}{\partial y'} = 0. \tag{11}$$

Vorausgesetzt ist dabei immer, daſs die in (3) eingeführte Funktion $\vartheta(x)$ so gewählt werden kann, daſs (5) erfüllt ist. Dies wäre aber ersichtlich nur dann unmöglich, wenn $\delta' T$ für *alle* erlaubten Variationen $\delta' y$ oder, was dasselbe ist, δT für *alle* erlaubten Variationen δy verschwände, und dann müſste nach der Schluſsweise von Nr. 877 die Funktion W für sich die Differentialgleichung erfüllen:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial W}{\partial y'} = 0. \tag{12}$$

Wir erhalten also den Satz:

Satz. *Will man das Integral*

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

unter der Nebenbedingung

$$T = \int_{x_0}^{x_1} W dx = l$$

zu einem Maximum oder Minimum machen, so hat man die Lösungen der Differentialgleichung aufzusuchen:

$$\frac{\partial(V + \lambda W)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(V + \lambda W)}{\partial y'} = 0,$$

wo λ eine Konstante ist. Man verfährt also genau so, als ob man das Integral

$$S + \lambda T = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda W) dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum machen wollte. Vorausgesetzt wird dabei nur, dafs die aus dem „isoperimetrischen" Integral T abgeleitete Lagrangesche Differentialgleichung nicht gleichzeitig erfüllt ist.

Diese Regel stammt von Euler und ist ganz analog dem in Nr. 167 bei der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima angewandten Verfahren.

Man hat also zuerst die Differentialgleichung zweiter Ordnung (11) unter den Grenzbedingungen

$$y = y_0 \quad \text{für} \quad x = x_0,$$
$$y = y_1 \quad \text{für} \quad x = x_1$$

zu integrieren. So erscheint y als Funktion der Veränderlichen x und des unbekannten konstanten Parameters λ. Setzt man diese Funktion in die Nebenbedingung $T = l$ ein, so bestimmt sich hieraus schliefslich auch die Unbekannte λ. Diese hängt also nur von den Bedingungen des Problemes ab und ist unabhängig von der willkürlichen Variation $\delta' y$, durch welche sie in (9) ursprünglich eingeführt wurde. In der That gilt die Beziehung (10) auf Grund der Differential-

gleichung (11) für *alle* erlaubten Variationen δy, sie gilt also auch für $\delta' y$, und die Gleichung (9) ist für ein willkürliches $\delta' y$ bei demselben λ immer erfüllt.

Das gewonnene Ergebnis wollen wir jetzt auf einige Beispiele anwenden.

893. Die kleinste Rotationsfläche als isoperimetrisches Problem. *Welche Kurve unter allen isoperimetrischen, die man in einer Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten ziehen kann, ist diejenige, die bei der Rotation um eine in der Ebene gegebene Gerade die kleinste Rotationsfläche erzeugt?*

Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

überdies muſs

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$$

sein; man muſs also das Minimum von

$$S + \lambda T = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

bestimmen. Da λ eine Konstante ist, so ist die Rechnung die nämliche wie im ersten Beispiel (Nr. 878), und folglich ist die Kurve, welche die kleinste Oberfläche erzeugt, ebenfalls eine *Kettenlinie.* Nur kann hier die Leitlinie der Kettenlinie der Rotationsachse parallel sein, ohne wie dort mit ihr zusammenzufallen; vielmehr bestimmt sich der Abstand λ der beiden Geraden durch die vorgeschriebene Bogenlänge l.

Unsere Aufgabe gestattet indessen noch eine andere Deutung, die der Mechanik entlehnt ist und zur Benennung der „Kettenlinie" Anlaſs gegeben hat. Denken wir uns nämlich die Kurve zwischen ihren Endpunkten gleichförmig mit Masse belegt, so wird die Ordinate ihres Schwerpunktes gemäſs der „Guldinschen Regel":

$$y_0 = \frac{S}{l}$$

und wird mit S gleichzeitig zu einem Minimum. Die Kettenlinie mit horizontaler Leitlinie löst also die Aufgabe: *unter allen homogen mit schwerer Masse belegten Kurven von gegebener Länge zwischen gegebenen Endpunkten diejenige zu finden, deren Schwerpunkt möglichst tief liegt.* Nach den Prinzipien der Mechanik wird demnach ein biegsamer schwerer Faden, d. h. eine Kette, zwischen zwei festen Punkten aufgehängt, die Form einer Kettenlinie annehmen.

894. Die Rotationsfläche von kleinstem Volumen. *Welche Kurve ist unter allen isoperimetrischen zwischen gegebenen Endpunkten diejenige, für welche das Volumen der Rotationsfläche am kleinsten wird?*

Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx,$$

und wie vorhin ist

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l.$$

Man mufs das absolute Minimum von

$$S + \lambda T = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda \sqrt{1 + y'^2})\, dx$$

bestimmen, und hier ist:

$$V = y^2 + \lambda \sqrt{1 + y'^2}, \quad Y = 2y, \quad Y_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

also wird, da x selbst in V nicht vorkommt, nach (3) in Nr. 884 für $Y_2 = 0$:

$$V - y' Y_1 = c$$

das erste Integral der Differentialgleichung, d. h.:

$$y^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \quad \text{oder} \quad dx = \frac{(c - y^2)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (c - y^2)^2}}.$$

Dies ist die Differentialgleichung einer *elastischen Kurve* (Nr. 752).

895. Die kleinste Rotationsfläche von gegebenem Volumen. *Es soll die ebene Kurve bestimmt werden, welche bei der Rotation um eine in ihrer Ebene gelegene Achse die kleinste Fläche erzeugt, welche ein gegebenes Volumen einschließt.*

Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

und dabei ist:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = l.$$

Wir suchen das absolute Minimum des Integrales $S + \lambda T$ oder, was dasselbe ist, des Integrales:

$$2aS + T = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2ay\sqrt{1 + y'^2})dx,$$

wobei

$$a = \frac{1}{2\lambda}$$

eine neue an Stelle von λ eingeführte Konstante ist.

Nun wird

$$V = y^2 + 2ay\sqrt{1 + y'^2}, \quad Y_1 = \frac{2ayy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

also erhält man als erstes Integral der zum Minimum gehörigen Gleichung:

$$V - y' Y_1 = \pm b^2 \quad \text{oder} \quad y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + y'^2}} = \pm b^2,$$

wobei b eine willkürliche Konstante ist. Demnach wird:

$$dx = \frac{(y^2 \mp b^2)\, dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \mp b^2)^2}}.$$

Diese Gleichung ist die nämliche, welche wir in Nr. 755 untersucht haben; sie gehört zu einer Kurve, welche von dem Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel beschrieben wird, wenn diese, ohne zu gleiten, auf einer festen Geraden ihrer Ebene rollt, und erzeugt eine Rotationsfläche *von konstanter mittlerer Krümmung.*

896. Die Kurve von gröfstem Flächeninhalt bei gegebener Bogenlänge. *Es soll unter allen Kurven von gegebener Länge, welche in einer Ebene liegen und durch die Punkte C und D begrenzt sind, diejenige bestimmt werden, für welche die Fläche ABCD zwischen der Kurve, der x-Achse und den Ordinaten der Endpunkte ein Maximum wird.*

Das Integral, welches ein Maximum werden soll, ist hier:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx,$$

und dabei mufs

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l$$

sein, wo l eine gegebene Länge bedeutet. Man mufs also das absolute Maximum des Integrales

$$S + \lambda T = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2})\,dx$$

suchen, in dem λ eine Konstante ist. Hier wird

$$V = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}, \quad Y = 1, \quad Y_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

und man hat wieder den zweiten Fall der Nr. 884; die Lagrangesche Gleichung besitzt das erste Integral:

$$V - y' Y_1 = c \quad \text{oder} \quad y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

wobei c eine willkürliche Konstante ist. Hieraus folgt:

$$dx = \frac{(c - y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (c - y)^2}},$$

also:

$$x - c' = \sqrt{\lambda^2 - (c - y)^2} \quad \text{oder} \quad (x - c')^2 + (y - c)^2 = \lambda^2.$$

Die gesuchte Kurve ist also ein *Kreisbogen* über der Sehne CD, dessen Radius λ durch die vorgeschriebene Bogenlänge l bestimmt wird.

Soll nun aber eine *geschlossene* Kurve unter allen isoperimetrischen den gröfsten Flächeninhalt einschliefsen, so kann man sie durch passend gelegte Sehnen in solche Kurvenstücke zerlegen, welche einzeln den Forderungen des behandelten

Problemes genügen. Die Kurve mufs also aus lauter Kreisbogen bestehen. Dafs aber alle diese Kreisbogen einem einzigen Kreise angehören, und dafs dieser in der That die verlangte Maximumseigenschaft besitzt (Nr. 891), wird durch diese Betrachtungsweise zwar nahegelegt, aber durchaus noch nicht bewiesen. Vergl. die Schlufsbemerkung Nr. 901.

897. Allgemeinere isoperimetrische Probleme. Es soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden das Integral

$$S=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx, \tag{1}$$

während gleichzeitig r weitere Integrale vorgeschriebene Werte annehmen:

$$T_1=\int_{x_0}^{x_1} W_1\,dx=l_1,\ T_2=\int_{x_0}^{x_1} W_2\,dx=l_2,\ldots\ T_r=\int_{x_0}^{x_1} W_r\,dx=l_r. \tag{2}$$

Hier mögen die Funktionen $V, W_1, W_2, \ldots W_r$ aufser x die unbekannte Funktion y mit ihren n ersten Ableitungen enthalten.

Wir betrachten jetzt die $r+1$-fache Kurvenschar:

$$y=f(x)+\alpha\eta(x)+\beta_1\vartheta_1(x)+\cdots+\beta_r\vartheta_r(x), \tag{3}$$

worin $f(x)$ die gesuchte Funktion sein soll, die Funktionen $\eta(x), \vartheta_1(x), \ldots \vartheta_r(x)$ aber gleichfalls allen Stetigkeitsbedingungen des Problemes genügen und an beiden Grenzen x_0 und x_1 nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen verschwinden mögen. Dann werden alle Kurven dieser Schar für hinreichend kleine Werte der Parameter $\alpha, \beta_1, \ldots \beta_r$ auch den Grenzbedingungen genügen, und nach getroffener Wahl der Funktionen $\eta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_r$ verwandeln sich die Integrale $S, T_1, \ldots T_r$ in ebensoviele analytische Funktionen der genannten Parameter.

Für $\alpha=0, \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_r=0$ wird $y=f(x)$, und die Bedingungen (2) werden nach unserer Annahme von selbst erfüllt. Im übrigen können die Gleichungen

$$T_1(\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)=l_1,\ T_2(\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)=l_2,\ldots\ T_r(\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)=l_r \tag{2a}$$

dazu dienen, die r Gröfsen β als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen α zu definieren. In der That ergeben sich

nach dem Satze Nr. 720 r analytische Funktionen $\beta_1(\alpha), \ldots \beta_r(\alpha)$, welche sich für $\alpha = 0$ sämtlich auf 0 reduzieren, in der Umgebung dieser Stelle regulär sind und die Gleichungen (2a) erfüllen, vorausgesetzt, dafs die Funktionaldeterminante der r Funktionen $T_1, T_2, \ldots T_r$ nach der Veränderlichen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ an der betrachteten Ausgangsstelle $\alpha = 0$, $\beta_1 = 0, \ldots \beta_r = 0$ nicht verschwindet.

Nun haben wie in Nr. 892 die partiellen Ableitungen der Integrale $S, T_1, \ldots T_r$ nach den Parametern $\alpha, \beta_1, \ldots \beta_r$ an dieser Stelle wieder die Form und Bedeutung von Variationen (Nr. 875), so dafs wir schreiben können:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_0 = \delta S, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \beta_1}\right)_0 = \delta_1 S, \ldots \left(\frac{\partial S}{\partial \beta_r}\right)_0 = \delta_r S \\ &\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_0 = \delta T, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \beta_1}\right)_0 = \delta_1 T, \ldots \left(\frac{\partial T}{\partial \beta_r}\right)_0 = \delta_r T, \end{aligned}$$

und die Bedingung für die Auflösbarkeit von (2a) nimmt die Form an:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \delta_1 T_1 & \delta_2 T_1 & \ldots & \delta_r T_1 \\ \delta_1 T_2 & \delta_2 T_2 & \ldots & \delta_r T_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_1 T_r & \delta_2 T_r & \ldots & \delta_r T_r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Denkt man sich jetzt die gefundenen Funktionen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ in (1) eingeführt, so wird S eine Funktion von α allein, welche für $\alpha = 0$ ihren gröfsten oder kleinsten Wert annehmen soll. Daraus ergiebt sich dann, wie in Nr. 874, die Bedingung

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0,$$

während wegen (2a) gleichzeitig auch alle nach α genommenen totalen Ableitungen der Integrale $T_1, T_2, \ldots T_r$ verschwinden müssen. Wir erhalten also mit Benutzung der Bezeichnungen (4) für die Stelle $\alpha = 0$ das folgende System von Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{dS}{d\alpha} = \delta S + \delta_1 S \dfrac{d\beta_1}{d\alpha} + \cdots + \delta_r S \dfrac{d\beta_r}{d\alpha} = 0 \\ \dfrac{dT_1}{d\alpha} = \delta T_1 + \delta_1 T_1 \dfrac{d\beta_1}{d\alpha} + \cdots + \delta_r T_1 \dfrac{d\beta_r}{d\alpha} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dT_r}{d\alpha} = \delta T_r + \delta_1 T_r \dfrac{d\beta_1}{d\alpha} + \cdots + \delta_r T_r \dfrac{d\beta_r}{d\alpha} = 0. \end{cases}$$

Um hier die unbekannten Ableitungen $\frac{d\beta_1}{d\alpha}, \ldots \frac{d\beta_r}{d\alpha}$ zu eliminieren, kann man wie in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima (Nr. 166) r Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ einführen und erhält so das äquivalente Gleichungssystem:

$$(7) \quad \begin{cases} \delta S + \lambda_1 \delta T_1 + \lambda_2 \delta T_2 + \cdots + \lambda_r \delta T_r = 0 \\ \delta_1 S + \lambda_1 \delta_1 T_1 + \lambda_2 \delta_1 T_2 + \cdots + \lambda_r \delta_1 T_r = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta_r S + \lambda_1 \delta_r T_1 + \lambda_2 \delta_r T_2 + \cdots + \lambda_r \delta_r T_r = 0. \end{cases}$$

Hier kann man sich die Faktoren $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ unter der Voraussetzung (5) durch die letzten r Gleichungen als Funktionen der Variationen $\delta_1 S, \delta_1 T_1, \ldots, \delta_r T_r$ ausgedrückt denken; sie sind also sämtlich von x unabhängige Gröſsen. Es giebt demnach r Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$, für welche die erste Gleichung (7) gleichzeitig mit den Nebenbedingungen (2) bestehen muſs, und zwar für jede erlaubte Variation $\delta y = \eta(x)$.

Dieser Gleichung kann man aber ebenso wie in Nr. 892 auch die Form geben:

$$(7a) \quad \delta(S + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_n T_n) = 0,$$

und man erhält dieselbe Differentialgleichung für $y = f(x)$, als wenn es sich darum handelte, das Integral

$$(8) \quad S^* = S + \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_r T_r = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda_1 W_1 + \cdots + \lambda_r W_r) dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen.

Die in der Lösung der Differentialgleichung auſser den Integrationskonstanten noch auftretenden Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ müssen schlieſslich durch die r Nebenbedingungen (2) bestimmt werden. Vorausgesetzt wird bei dieser Schluſsweise nur, daſs die Bedingung (5) für irgend ein System von erlaubten Variationen $\delta_1 y, \delta_2 y, \ldots \delta_r y$ erfüllt werden kann, daſs also die betrachtete Determinante nicht für *alle* solchen Variationen identisch verschwindet.

898. Eine andere Klasse von Nebenbedingungen. Es handelt sich hier um Probleme, in denen das betrachtete Integral S *mehrere* unbekannte Funktionen $y, z, w, \ldots$ der unabhängigen Veränderlichen x enthält, welche ihrerseits durch Gleichungen oder Differentialgleichungen der Form:

$$F(x, y, z, w, \ldots y', z', w', \ldots) = 0, \quad \Phi = 0, \ldots$$

deren Anzahl nur die der unbekannten Funktionen nicht überschreiten darf, miteinander verbunden sind. Da diese Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ für jeden Wert von x gültig sein müssen, so sind im Gegensatz zu den früheren Fällen eigentlich unendlich viele Nebenbedingungen zu erfüllen. Gleichwohl kann man auch hier die Methode der Lagrangeschen Faktoren anwenden und erhält dieselben Differentialgleichungen, als sollte das Integral:

$$S^* = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda F + \mu \Phi + \cdots) dx$$

nach den Regeln von Nr. 880 zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden. Nur werden jetzt die Lagrangeschen Faktoren $\lambda, \mu, \ldots$ nicht mehr Konstanten sein, sondern unbekannte Funktionen von x, die erst nach der Integration mit Hilfe der Nebenbedingungen $F = 0$, $\Phi = 0$ u.s.w. bestimmt werden können. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Methode müſste sich aber auf die Existenz von Kurvenscharen α stützen, die sich an die gesuchte Kurve stetig anschlieſsen und für alle Werte des Parameters α die sämtlichen Nebenbedingungen identisch erfüllen, und ist besonders dann nicht ganz einfach, wenn diese Nebenbedingungen auſser den unbekannten Funktionen noch ihre Ableitungen enthalten. Wir wollen daher in unserer elementaren Darstellung der Variationsrechnung von solchen Fällen absehen und uns auſserdem zur Vereinfachung zunächst auf Probleme mit *zwei* unbekannten Funktionen und *einer* zwischen ihnen bestehenden Bedingungsgleichung beschränken.

899. Behandlung des einfachsten Falles. Es sei gegeben ein Integral von der in Nr. 880 betrachteten Form:

$$(1) \qquad S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, z, y', z')dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}, \ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

und zugleich eine Nebenbedingung:

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Es wird also unter allen *Raumkurven* $y = y(x)$, $z = z(x)$, welche auf der *Fläche* $F = 0$ liegen, eine solche gesucht, die das Integral (1) zu einem Maximum oder Minimum macht. Um diese Aufgabe zu behandeln, denken wir uns zunächst die Gleichung (2) nach z aufgelöst:

$$(2a) \qquad z = h(x, y),$$

und erhalten hieraus durch Differentiation nach x:

$$(3) \qquad z' = p + qy',$$

wo p und q die nach x und y genommenen partiellen Ableitungen von h bedeuten. So geht das Integral (1) über in:

$$(1a) \qquad S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, h(x, y), y', p + qy')dx,$$

und dieses Integral, das nur noch eine einzige unbekannte Funktion y enthält, kann genau nach der Methode der Nrn. 876 und 877 behandelt werden. Bezeichnet man nämlich mit Y, Z; Y_1, Z_1, wie in Nr. 880, die partiellen Ableitungen der ursprünglichen Funktion V in (1) nach y, z; y', z', so werden die Ableitungen der durch (2a) transformierten, in (1a) erscheinenden Funktion:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y + qZ + Z_1\left(\frac{\partial p}{\partial y} + y'\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = Y_1 + qZ_1,$$

und die Lagrangesche Differentialgleichung (Nr. 877) nimmt die Form an:

$$L \equiv \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'} = Y + qZ + Z_1\left(\frac{\partial p}{\partial y} + y'\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$
$$- Y_1' - qZ_1' - Z_1\left(\frac{\partial q}{\partial x} + y'\frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0$$

oder, weil

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$$

ist, einfach:

$$Y + qZ - Y_1' - qZ_1' = 0. \tag{4}$$

Führt man hier für q nach (2) seinen Wert ein:

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z},$$

wo F_y und F_z die partiellen Ableitungen von F nach y und z bedeuten, so erhält man:

$$\frac{Y - Y_1'}{F_y} = \frac{Z - Z_1'}{F_z}, \tag{4a}$$

oder, wenn man den Wert beider Quotienten mit $-\lambda$ bezeichnet:

$$\begin{cases} Y + \lambda F_y - Y_1' = 0 \\ Z + \lambda F_z - Z_1' = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Zu denselben Gleichungen aber wäre man gelangt, wenn man gemäfs Nr. 880 die Maxima und Minima des Integrales:

$$S^* = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda F)\,dx \tag{6}$$

aufgesucht hätte unter der Annahme, dafs λ eine gegebene, y und z aber zwei voneinander unabhängige unbekannte Funktionen von x seien. Es ist also wenigstens für den betrachteten Spezialfall die Berechtigung der Lagrangeschen Methode erwiesen. Von dem gewonnenen Ergebnis wollen wir nun eine in der Flächentheorie besonders wichtige Anwendung machen.

900. Kürzeste Linien auf einer Fläche. Es sei eine Fläche in rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch:

$$F(x, y, z) = 0$$

und auf ihr zwei Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1), und es wird verlangt, die beiden Punkte durch eine ganz in der

Fläche liegende Raumkurve $y = y(x)$, $z = z(x)$ so zu verbinden, daſs die Bogenlänge:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

möglichst klein wird.

Hier haben wir genau den in der vorigen Nummer betrachteten Fall eines Variationsproblemes (1) mit zwei unbekannten Funktionen und einer Nebenbedingung (2), und es wird in der dort verwendeten Bezeichnung:

$$Y = Z = 0,\quad Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds},\quad Z_1 = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds},$$

wo ds das Element der Bogenlänge bedeutet.

Somit nimmt die Differentialgleichung (4a) des Problemes die besondere Form an:

$$\frac{\frac{d}{dx}\frac{dy}{ds}}{F_y} = \frac{\frac{d}{dx}\frac{dz}{ds}}{F_z}.$$

Hätten wir aber an Stelle von x die zweite Koordinate y zur unabhängigen Veränderlichen gewählt, so hätten wir die folgende analoge Differentialgleichung erhalten, die sich auch direkt aus der ersten ableiten lieſse:

$$\frac{\frac{d}{dy}\frac{dx}{ds}}{F_x} = \frac{\frac{d}{dy}\frac{dz}{ds}}{F_z},$$

und da beide Gleichungen offenbar gleichzeitig bestehen müssen, so können wir sie auch vereinigen in der Form:

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{F_x} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{F_y} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{F_z},$$

welche eine einfache geometrische Deutung zuläſst.

Die Zähler der drei Ausdrücke sind nämlich nach Nr. 262 proportional den Kosinus der Winkel, welche die Hauptnormale der Raumkurve mit den Achsen bildet, die Nenner dagegen sind proportional den Kosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche mit denselben Achsen bildet. Es muſs also die

Hauptnormale der Kurve mit der Flächennormale zusammenfallen, oder, was dasselbe ist, ihre Oskulationsebene auf der Tangentialebene senkrecht stehen.

Bezeichnet man nun eine Kurve der Fläche, welche diese geometrische Eigenschaft besitzt, als eine *geodätische* Linie, so hat man den Satz:

Satz. *Die kürzesten Linien auf einer Fläche müssen geodätische Linien sein, d. h. ihre Oskulationsebenen stehen überall normal zur Fläche.*

901. Ausdehnung der Methode auf beliebig viele Funktionen und Nebenbedingungen. Gesucht werden n Funktionen:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \ldots y_n = f_n(x)$$

der unabhängigen Veränderlichen x, für welche das Integral:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n')\,dx \tag{1}$$

ein Maximum oder Minimum wird, während gleichzeitig für ein beliebiges $r < n$ die r Bedingungen bestehen:

$$F_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \quad F_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \quad \ldots F_r(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0. \tag{2}$$

Wir betrachten jetzt die einfache Schar (α) der Funktionen:

$$y_1 = f_1(x) + \alpha\eta_1(x), \ldots y_n = f_n(x) + \alpha\eta_n(x), \tag{3}$$

in welcher alle Funktionen η an beiden Integrationsgrenzen x_0 und x_1 verschwinden sollen. Diese Funktionen y denken wir uns in (2) eingesetzt und erhalten so für jede Kombination von x und α r analytische Gleichungen zwischen den n Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$, welche für $\alpha = 0$ von selbst erfüllt sind. Es werde nun vorausgesetzt, dafs die Funktionaldeterminante Δ der r Funktionen F nach r Variabelen y, wir nehmen an, den r letzten $y_{n-r+1}, \ldots y_n$, für alle Werte x des Intervalles und für $\alpha = 0$ von Null verschieden sei. Dann kann man die $n - r$ Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-r}$ willkürlich annehmen und für jeden Wert x und für hinreichend kleine Werte von α nach Nr. 720 die r Gleichungen (2) nach

den Unbekannten $\eta_{n-r+1}, \ldots \eta_n$ auflösen. Diese ergeben sich als Potenzreihen in α, sind gleichzeitig stetige Funktionen von x und müssen ebenso wie die Funktionen $\eta_1, \ldots \eta_{n-r}$ an beiden Grenzen x_0 und x_1 verschwinden. Denn sie sind an jeder Stelle x durch die Werte $\eta_1, \ldots \eta_{n-r}$ eindeutig bestimmt, und die Gleichungen (2) werden an den Grenzen sicher erfüllt durch $\eta_1 = 0, \ldots \eta_n = 0$. Für die von α freien Anfangsglieder $\bar{\eta}_{n-r+1}, \ldots \bar{\eta}_n$ der Entwickelungen erhält man aus (2) durch Differentiation nach α an der Stelle $\alpha = 0$:

$$
(4) \quad \begin{aligned}
\delta F_1 &\equiv \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\eta_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-r+1}}\bar{\eta}_{n-r+1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\bar{\eta}_n = 0,\\
\delta F_2 &\equiv \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\eta_2 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_{n-r+1}}\bar{\eta}_{n-r+1} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\bar{\eta}_n = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta F_r &\equiv \frac{\partial F_r}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial F_r}{\partial y_2}\eta_2 + \cdots + \frac{\partial F_r}{\partial y_{n-r+1}}\bar{\eta}_{n-r+1} + \cdots + \frac{\partial F_r}{\partial y_n}\bar{\eta}_n = 0,
\end{aligned}
$$

also r lineare und homogene Gleichungen für die Gröfsen $\bar{\eta}_{n-r+1}, \ldots \bar{\eta}_n$ mit der Determinante $\Delta \neq 0$.

Wir erhalten somit für jedes zulässige System der Variationen $\eta_1, \ldots \eta_{n-r}$ eine Kurvenschar (3), die alle Bedingungen (2) befriedigt und an beiden Integrationsgrenzen die vorgeschriebenen Werte der $y_1, \ldots y_n$ liefert. So wird S wieder eine analytische Funktion von α, deren Ableitung an der Stelle $\alpha = 0$, welche dem Maximum oder Minimum entspricht, wie in Nr. 874 verschwinden mufs. Wir haben also wieder:

$$
(5) \quad \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_0 = \delta S
$$

$$
= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\eta_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y_n}\bar{\eta}_n + \frac{\partial V}{\partial y_1'}\eta_1' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y_n'}\eta_n'\right) dx = 0,
$$

oder nach Ausführung der partiellen Integration, wie in Nr. 876, unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen:

$$
(5a) \quad \delta S = \int_{x_0}^{x_1} (L_1\eta_1 + L_2\eta_2 + \cdots + L_n\bar{\eta}_n)\, dx = 0,
$$

wenn man analog wie dort die Abkürzungen einführt:

$$
L_1 = \frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y_1'}, \ldots \quad L_n = \frac{\partial V}{\partial y_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y_n'}.
$$

Sind nun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ irgendwelche Funktionen von x, so kann man wegen (4) in Gleichung (5a) unter dem Integralzeichen noch hinzufügen den Ausdruck:

$$\lambda_1 \delta F_1 + \lambda_2 \delta F_2 + \cdots + \lambda_r \delta F_r = 0.$$

Nach der über die Funktionaldeterminante Δ gemachten Voraussetzung kann man aber diese Funktionen λ so wählen, dafs gleichzeitig:

$$(6) \quad \begin{cases} L^*_{n-r+1} \equiv L_{n-r+1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-r+1}} + \cdots + \lambda_r \dfrac{\partial F_r}{\partial y_{n-r+1}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L^*_n \equiv L_n + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} + \cdots + \lambda_r \dfrac{\partial F_r}{\partial y_n} = 0. \end{cases}$$

Dann werden also in (5a) die sämtlichen mit $\bar{\eta}_{n-r+1}, \ldots \bar{\eta}_n$ multiplizierten Glieder herausfallen, und es bleiben unter dem Integralzeichen nur die Glieder:

$$L^*_1 \eta_1 + L^*_2 \eta_2 + \cdots + L^*_{n-r} \eta_{n-r}.$$

Da nun aber die Funktionen $\eta_1, \ldots \eta_{n-r}$, abgesehen von den Grenzbedingungen, willkürlich sind, so können wir wie in Nr. 880 schliefsen, dafs auch ihre Koeffizienten $L^*_1, \ldots L^*_{n-r}$ sämtlich verschwinden müssen. Wir erhalten also mit Rücksicht auf (6) das simultane System der Differentialgleichungen:

$$(7) \qquad L^*_i \equiv L_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_i} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial y_i} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial V}{\partial y'_i} = 0$$

für $i = 1, 2, \ldots n$. Die in Nr. 898 angedeutete Methode der Lagrangeschen Faktoren hat sich also auch hier als richtig herausgestellt.

Zum Zwecke der Integration mufs man aber die n linear vorkommenden Multiplikatoren λ wieder eliminieren, d. h. ihre aus (6) gewonnenen Ausdrücke in die $n - r$ übrigen Gleichungen (7) einsetzen, und erhält so ein neues System von $n - r$ Differentialgleichungen zwischen den y allein, welche in Gemeinschaft mit den r Bedingungsgleichungen (2) zur Be-

stimmung dieser n unbekannten Funktionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ dienen können.

902. Schlufsbemerkung. Die in diesem Kapitel entwickelten Methoden der Variationsrechnung ermöglichen uns in einer Reihe von Fällen die Aufstellung von Differentialgleichungen und Grenzbedingungen, denen die gesuchten Funktionen genügen müssen. Dagegen blieb die Frage noch unerledigt, ob oder unter welchen Bedingungen die gefundenen Funktionen auch wirklich das betrachtete Integral zu einem Maximum oder Minimum machen. Die nähere Untersuchung zeigt nun, dafs die Lösungen der Lagrangeschen Differentialgleichungen nur innerhalb bestimmter Grenzen, welche durch weitere Kriterien gegeben werden, unsere Forderung erfüllen, diese Eigenschaft aber verlieren, wenn man das Integrationsintervall über diese Grenzen hinaus erweitert.

So gilt in der Aufgabe Nr. 900 die Eigenschaft, die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche zu sein, nicht notwendig für alle Bogen einer geodätischen Linie. Auf der Kugel z. B. sind die geodätischen Linien Hauptkreise, d. h. Kreise, deren Ebenen durch den Kugelmittelpunkt gehen. Aber zwischen zwei Punkten eines solchen Hauptkreises hat nur der kleinere der beiden verbindenden Kreisbogen, welcher kleiner ist als der Halbkreis, die Eigenschaft des Minimums.

Die Aufstellung der neu hinzukommenden Bedingungen und der Nachweis, dafs diese Bedingungen in ihrer Gesamtheit für die Existenz eines Maximums oder Minimums auch hinreichend sind, erfordert aber kompliziertere Hilfsmittel, wie die „zweite Variation“ (Nr. 875), oder ein aus Lösungen der Lagrangeschen Differentialgleichung gebildetes „Feld“, und würde über den Rahmen unserer elementaren Darstellung hinausgehen. Bezüglich dieser Fragen sind wir also genötigt, auf die speziellen Lehrbücher der Variationsrechnung zu verweisen.

Anhang.

Zur Integration der partiellen Differentialgleichung in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Von **A. Harnack.**

Der in Nr. 641 gegebene Beweis für die Entwickelbarkeit einer Funktion der komplexen Variabelen z nach steigenden Potenzen von z innerhalb eines Gebietes, in welchem $f(z)$ eine eindeutige und stetige Funktion ist, die zugleich eine eindeutige und stetige Ableitung $f'(z)$ besitzt, stützt sich auf den Integralsatz von Cauchy, der in der Nr. 639 hergeleitet wurde. Man kann aber vermittelst der Fourierschen Reihe einen direkteren Beweis für dieses grundlegende Theorem geben, der unmittelbar auf die Potenzreihe führt. Ich teile denselben hier mit, im wesentlichen in der Form, wie ich ihn im 21. Bande der Math. Annalen aufgestellt habe, da er zugleich eine allgemeine Methode für die Integration linearer partieller Differentialgleichungen enthält, durch welche sich nicht nur die in den Nrn. 869—872 behandelten Aufgaben, sondern auch die analogen von Kugelfunktionen abhängigen Probleme der Potentialtheorie in exakter Weise erledigen lassen.

1. Stellung des Problems. Es sei ein die Ebene $z = x + iy$ oder einen Teil derselben einfach überdeckendes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet gegeben; für alle Punkte im Innern des Gebietes sei eine Funktion $w = u + iv$ definiert, welche dort überall *einen* bestimmten endlichen, mit der Lage des Punktes (xy) stetig sich ändernden Wert hat und ferner partielle Ableitungen nach x und y besitzt, die ebenfalls für alle Punkte im Innern stetig sind und dabei den Gleichungen

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

genügen. Dann soll gezeigt werden, daſs die Funktion w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ in dem Sinne ist, daſs sich dieselbe überall im Gebiete durch Potenzreihen darstellen

läſst; d. h. bezeichnet a einen beliebigen Punkt im Innern des Gebietes, so ist:

$$w = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots + a_n(z - a)^n + \cdots,$$

und diese Reihe konvergiert zum mindesten für alle Punkte z innerhalb eines Kreises um den Punkt a als Mittelpunkt, der ganz im Innern des anfänglich definierten Gebietes liegt, also die Randkurve allenfalls berührt, aber nicht durchschneidet. Aus dieser Reihe folgt, daſs auch alle Ableitungen der Funktion w innerhalb des gegebenen Gebietes Funktionen der komplexen Variabelen z ohne singuläre Punkte sind.

Man kann das Problem auch vermittelst der reellen Funktionen u und v allein aussprechen: Wenn zwei Funktionen u und v der reellen Veränderlichen x und y die Eigenschaft haben, daſs sie nebst ihren ersten partiellen Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes eindeutig und stetig sind, und daſs auſserdem zwischen diesen Ableitungen die Gleichungen (1) bestehen, so existieren auch alle höheren Ableitungen der beiden Funktionen u und v, und diese selbst lassen sich als der reelle und imaginäre Bestandteil einer nach Potenzen von $z - a$ fortschreitenden Reihe darstellen.

Endlich kann man noch einen Schritt weiter gehen und das Problem nur an *einer* der Funktionen u oder v formulieren. Setzt man nämlich von der Funktion u voraus, daſs sie auch eine zweite partielle Ableitung nach x besitzt, und daſs dieselbe eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, so erhält man durch Differentiation der ersten Differentialgleichung zwischen u und v:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

und daraus folgt, daſs man die zweite Differentialgleichung des Systems (1) nach y differentiieren kann, und daſs demnach

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ist. Man erhält folglich für u die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt: wenn eine Funktion u die Eigenschaft hat, daſs ihre zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ innerhalb eines Gebietes stetig sind und dieser Gleichung genügen, so läſst sich immer eine stetige Funktion v finden, für welche

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

wird; denn die Bedingung des exakten Differentiales ist erfüllt. Sonach wird mit den vorigen Problemen zugleich das dritte bewiesen sein: Wenn eine Funktion u der beiden reellen Veränderlichen x und y innerhalb eines Gebietes eindeutig und nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ stetig ist, während die zweiten Ableitungen die Gleichung (2) befriedigen, so sind auch alle Ableitungen von u stetige Funktionen der beiden Variabelen in diesem Gebiete, und es existiert eine „konjugierte" Funktion v, welche den Gleichungen (1) genügt.

2. Integration der Differentialgleichungen. Da es sich um den Nachweis einer Potenzentwickelung um einen beliebigen Punkt $a = \alpha + i\beta$ handelt, so führe man Polarkoordinaten ein:

$$x = \alpha + r\cos\vartheta, \quad y = \beta + r\sin\vartheta$$

und setze:

$$w = f(\alpha + r\cos\vartheta, \beta + r\sin\vartheta) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta).$$

Der Radius r darf nur so grofs gewählt werden, dafs der zugehörige Kreis nicht über das gegebene Gebiet hinausreicht; dieser Maximalwert von r, welcher zu einem bestimmten α und β gehört, heifse R. Die Funktionen u und v sind stetige Funktionen der Variabelen r und ϑ und aufserdem periodische Funktionen von ϑ mit der Periode 2π. Es wird nun:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial w}{\partial x} r\sin\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y} r\cos\vartheta,$$

also:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right)(\cos\vartheta - i\sin\vartheta);$$

mithin lautet die Differentialgleichung (1) in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0. \tag{3}$$

Dieselbe zerlegt sich in die beiden:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0. \tag{4}$$

Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ auch an der Stelle $r = 0$ endlich bleiben, so ist für alle Werte von ϑ:

$$\lim_{r=0}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r=0}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = 0. \tag{5}$$

Weil nun auf jedem Kreise mit dem Radius $r < R$ die Gröſsen u und v stetige Funktionen von ϑ sind, welche überdies die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ besitzen, so sind die Werte von u und v ausnahmslos durch Fouriersche Reihen darstellbar (II, S. 390); d. h. es ist:

$$(6)\qquad \begin{cases} u(r, \vartheta) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta), \\ v(r, \vartheta) = \mathsf{A}_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(\mathsf{A}_k \cos k\vartheta + \mathsf{B}_k \sin k\vartheta), \end{cases}$$

wobei

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \vartheta)\, d\vartheta, \quad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \vartheta) \cos k\vartheta\, d\vartheta,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \vartheta) \sin k\vartheta\, d\vartheta,$$

und A_k, B_k analoge Ausdrücke in v sind. Demnach ist:

$$(7)\qquad w = A_0 + i\mathsf{A}_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}[(A_k + i\mathsf{A}_k)\cos k\vartheta + (B_k + i\mathsf{B}_k)\sin k\vartheta].$$

Die Koeffizienten A_k, B_k, A_k, B_k sind reelle Funktionen des Radius r. Wie müssen diese beschaffen sein, damit die partiellen Differentialgleichungen (4) erfüllt sind? Man kann die Frage nicht so lösen, daſs man die Reihen (6) gliedweise sowohl nach r wie nach ϑ differentiiert; denn damit würde die Darstellbarkeit der Funktionen $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ u.s.w. durch trigonometrische Reihen vorausgesetzt werden, die aus der Stetigkeit dieser Funktionen allein nicht hervorgeht. Man gelangt vielmehr zu den gesuchten Relationen auf entgegengesetztem Wege, indem man die Differentialgleichungen integriert.

Multipliziert man die erste der Gleichungen (4) mit $\sin k\vartheta$, so wird:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta = 0,$$

und da diese Gleichung für alle Werte von ϑ gilt, so wird auch:

$$(8)\qquad r\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta\, d\vartheta - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta\, d\vartheta = 0.$$

Das zweite Integral läſst sich durch partielle Integration umformen; es ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta \, d\vartheta = [v \sin k\vartheta]_{-\pi}^{+\pi} - k \int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta \, d\vartheta,$$

und da der erste Term der rechten Seite verschwindet, so lautet nunmehr die Gleichung (8):

$$r \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta + k \int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta \, d\vartheta = 0.$$

Da ferner $\frac{\partial u}{\partial r}$ eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, so ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta \, d\vartheta,$$

und sonach erhält man an Stelle von (8) die Bedingungsgleichung:

$$r \frac{dB_k}{dr} + k\mathsf{A}_k = 0. \tag{9}$$

Wird dieselbe Differentialgleichung (4) mit $\cos k\vartheta$ multipliziert, so folgt nach demselben Verfahren:

$$r \frac{dA_k}{dr} - k\mathsf{B}_k = 0, \tag{10}$$

und wird die zweite der Gleichungen (4) in derselben Weise behandelt, so erhält man:

$$r \frac{d\mathsf{B}_k}{dr} - kA_k = 0, \tag{11}$$

$$r \frac{d\mathsf{A}_k}{dr} + kB_k = 0. \tag{12}$$

Das simultane System dieser vier Gleichungen definiert die Koeffizienten für die Reihenentwickelungen (6) der Funktionen u und v; dasselbe gilt für alle Werte von $k = 1$ an. Für $k = 0$ hat man die Gleichungen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\vartheta - \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dA_0}{dr} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial r} d\vartheta + \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathsf{A}_0}{dr} = 0,$$

da u und v auf jedem Kreise stetige und periodische Funktionen von ϑ sein müssen. Also sind A_0 und A_0 Konstanten. Das obige System aber läfst sich in einfachster Weise vollständig integrieren. Differentiiert man die Gleichung (9) nach r, was gestattet ist, da A_k eine Ableitung nach r besitzt, so folgt:

$$\frac{dB_k}{dr} + r\frac{d^2B_k}{dr^2} + k\frac{d\mathsf{A}_k}{dr} = 0$$

oder wegen (12):

$$\frac{d^2B_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dB_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2}B_k = 0. \tag{13}$$

Demnach wird mit Hilfe von (9):

$$\left\{\begin{aligned} B_k &= C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \\ \mathsf{A}_k &= -C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

und nach dem gleichen Verfahren:

$$\left\{\begin{aligned} A_k &= C_1' r^k + C_2' r^{-k}, \\ \mathsf{B}_k &= C_1' r^k - C_2' r^{-k}. \end{aligned}\right.$$

Die Gröfsen C_1, C_2, C_1', C_2' sind vier willkürliche reelle Integrationskonstanten. Da aber u und v auch für $r = 0$ endlich bleiben, so ist z. B. auch

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta \, d\vartheta = \pi B_k$$

für $r = 0$ endlich. Mithin müssen die Koeffizienten der negativen Potenzen von r sämtlich null sein, d. h. es ist:

$$B_k = C_1 r^k, \quad \mathsf{A}_k = -C_1 r^k, \quad A_k = C_1' r^k, \quad \mathsf{B}_k = C_1' r^k. \tag{15}$$

Weil solche Gleichungen für sämtliche Werte von k gelten, während die beiden Integrationskonstanten je nach den Werten von k verschieden sein können, so sollen diese Konstanten ebenfalls durch den Index k unterschieden werden. Man setze also:

$$A_0 = C_0, \quad \mathsf{A}_0 = C_0', \quad -B_k = \mathsf{A}_k = C_k' r^k, \quad \mathsf{B}_k = A_k = C_k r^k,$$

so erhält die Reihe (7) die Form:

$$w = (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} [(C_k + iC_k') r^k \cos k\vartheta + (-C_k' + iC_k) r^k \sin k\vartheta]$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} w &= (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k') r^k e^{ik\vartheta}, \\ &= (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k')(z - a)^k, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

sie ist also eine Potenzreihe der komplexen Variabelen $z - a$.

3. Die Laurentsche Reihe. Das Auftreten der negativen Potenzen von r in dem vollständigen Integrale (14) des simultanen Systemes weist darauf hin, dafs die soeben entwickelte Methode eine Erweiterung des Problemes gestattet: es sei die Funktion w so beschaffen, dafs sie für eine endliche Anzahl von Stellen im Innern des gegebenen Gebietes unendlich wird. In diesem Falle kann man einen solchen singulären Punkt c mit einem Kreise von beliebig kleinem Radius ϱ umschliefsen, dessen Mittelpunkt c ist, und aufserdem einen zweiten Kreis vom Radius R mit demselben Mittelpunkt konstruieren, dessen Radius so grofs gewählt wird, dafs in dem ringförmigen Gebiete zwischen ϱ und R kein Unendlichkeitspunkt der Funktion angetroffen wird. Für alle Werte von r zwischen ϱ und R ist alsdann die Funktion w durch eine konvergente Potenzreihe von der Form:

$$(17)\quad w = (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} [(C_k + iC_k') r^k e^{ik\vartheta} + (D_k + iD_k') r^{-k} e^{-ik\vartheta}]$$

ausdrückbar, wobei D_k und D_k' ein neues Paar von Integrationskonstanten bezeichnen, welches oben zuerst C_1' und C_2 genannt wurde. Diese Entwickelung bleibt bei beliebig kleinen Werten von r giltig und stellt die Laurentsche Reihe dar. Wird nun die Funktion im Punkte c derart unendlich, dafs das Produkt $w(z-c)$ für $z = c$ gleich Null wird, so müssen auch jetzt noch alle Koeffizienten der negativen Potenzen von r verschwinden, und es besteht also der Satz: Wenn für eine Funktion w, welche im übrigen den anfänglichen Bedingungen (Nr. 1) genügt, nur die Möglichkeit offen gelassen wird, dafs sie in einzelnen Punkten im Innern des Gebietes unendlich wird, so jedoch, dafs überall auf der Fläche $w(z-z')$ für $z = z'$ gleich Null wird, so ist sie notwendig nebst allen ihren Differentialquotienten in allen Punkten im Innern der Fläche ohne Ausnahme endlich und stetig.

Sind in dem Gebiete beliebig viele Unendlichkeitsstellen enthalten, so gilt die vorstehende Reihe für jedes durch zwei konzentrische Kreise begrenzte Gebiet, in welchem keine singulären Punkte gelegen sind; nur kann in diesem Falle der innere Kreis im allgemeinen nicht mehr beliebig klein gemacht werden.

4. Zusätze. Es soll nun untersucht werden, in welcher Weise sich die Voraussetzungen des Theoremes in Nr. 1 noch erweitern lassen, ohne dafs die Giltigkeit desselben aufhört. Es sei nach wie vor w innerhalb des Gebietes eine *durchaus stetige* Funktion (ohne Unendlichkeitspunkte); aber es gebe Stellen, von denen nicht bekannt ist, ob an denselben die Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

vermittelst endlicher bestimmter Werte der Ableitungen erfüllt ist, Stellen also, an denen entweder diese Ableitungen einzeln oder beide unbestimmt, auch unendlich werden, oder an denen dieselben nicht mehr der Differentialgleichung genügen könnten. Auch werde die Möglichkeit offen gelassen, daſs Stellen vorhanden sind, an denen diese Ableitungen, mögen sie dort der Differentialgleichung genügen oder nicht, nicht mehr stetige Funktionen der beiden Variabelen x und y sind.

Wählt man wiederum einen beliebigen Punkt im Innern des Bereiches zum Mittelpunkt der Reihenentwickelungen, wie sie durch die Gleichungen (7) definiert sind, so werden alle früheren Schlüsse, aus denen hervorging, daſs die Koeffizienten gemäſs den Gleichungen (15) Potenzen von r multipliziert mit bestimmten Konstanten sind, anwendbar sein, wenn dreierlei erhalten bleibt. Erstlich müssen diese Koeffizienten noch immer stetige Funktionen von r bleiben, und dies ist zufolge der Definition derselben vermittelst bestimmter Integrale in der That der Fall, wenn w durchaus stetig ist. Zweitens müssen auch ihre Ableitungen $\frac{dA_k}{dr}, \frac{dB_k}{dr}, \frac{d\mathsf{A}_k}{dr}, \frac{d\mathsf{B}_k}{dr}$ stetige Funktionen von r sein, und drittens müssen die Differentialgleichungen (9) bis (12), wenn sie auch nicht von vornherein als für jeden Wert von r geltend bekannt sind, doch in beliebiger Nähe eines jeden Wertes Geltung haben. Sind nämlich die Koeffizienten nebst ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von r, so folgt, daſs diese Differentialgleichungen ausnahmslos erfüllt sind, weil zwei stetige Funktionen $\frac{dB_k}{dr}$ und A_k, welche der Gleichung (9)

$$r\frac{dB_k}{dr} + k\mathsf{A}_k = 0$$

in jedem kleinsten Intervalle mindestens an einer Stelle genügen, durchweg diese Relation befriedigen.

Die Stetigkeit der ersten Ableitungen bleibt gesichert, sobald das simultane System erster Ordnung bei allen Werten von r mit Ausnahme einer *diskreten* Menge Geltung hat, oder genauer, sobald man weiſs, daſs die Gleichung

$$\frac{dB_k}{dr} = -\frac{k}{r}\mathsf{A}_k$$

und die analogen im allgemeinen bestehen, nämlich so, daſs die Werte von r zwischen 0 und R, für welche die beiden Seiten um mehr als eine beliebig kleine Zahl δ differieren, stets nur eine Menge bilden, die sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschlieſsen läſst, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann (vergl. Nr. 405). Denn wenn dieses der Fall ist,

so folgt durch Integration, dafs die Funktion B_k die Ableitung $-\frac{k}{r}\mathsf{A}_k$ besitzt, die in der That durchaus stetig ist. Dabei ist allerdings noch angenommen, dafs die Ableitung $\frac{dB_k}{dr}$ bei ihrer Integration nach r die Funktion B_k liefert, was aus den angenommenen Bedingungen dann unmittelbar hervorgeht, wenn die Ableitung zugleich durchaus endlich ist; dagegen ist dies eine besondere Bedingung, wenn auch die Möglichkeit offen gelassen wird, dafs die Ableitung unendlich wird. Die Forderung, dafs das simultane System bis auf Werte einer diskreten Menge von r gegeben sein mufs, soll nun vermittelst der ursprünglichen Differentialgleichungen (4) ausgedrückt werden.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta = 0$$

und den analogen kann bei festem Werte von r stets die Gleichung:

$$\int_{r_0}^{r} dr \int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta\right) d\vartheta = 0$$

gefolgert werden, wenn innerhalb des ebenen Gebietes alle die Stellen, an welchen die obige Gleichung nicht gilt, in Flächenstücke eingeschlossen werden können, deren Summe beliebig klein ist. Führt man zunächst die innere Integration aus, so folgt:

$$\int_{r_0}^{r} dr \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta\, d\vartheta + \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} k \int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta\, d\vartheta = 0.$$

Vertauscht man die Integration im ersten Integrale, was gestattet ist, wenn wir die doppelte Integrierbarkeit (vergl. Nr. 576) von $\frac{\partial u}{\partial r}$ voraussetzen, so wird dasselbe gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin k\vartheta\, d\vartheta \int_{r_0}^{r}\frac{\partial u}{\partial r} dr = \int_{-\pi}^{+\pi}\sin k\vartheta\, d\vartheta\, [u]_{r_0}^{r}.$$

Also wird in unserer früheren Bezeichnung:

$$[B_k]_{r_0}^{r} + k\int_{r_0}^{r}\frac{\mathsf{A}_k}{r} dr = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dB_k}{dr} + \frac{k}{r}\mathsf{A}_k = 0 \quad \text{u.s.w.}$$

Sonach läſst sich dem Hauptsatze die Fassung geben: Wenn eine Funktion w innerhalb eines die Ebene einfach überdeckenden Gebietes ausnahmslos stetig ist und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

„im allgemeinen" genügt, d. h. so, daſs die Punkte, an denen diese Differentialgleichung nicht erfüllt ist, sowie die Punkte, an denen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ (oder die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \vartheta}$) unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen oder unstetig werden, nur ein *lineares* System erfüllen, d. h. in eine endliche Anzahl von Flächenelementen eingeschlossen werden können, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann; wenn ferner die partiellen Ableitungen die doppelte Integrierbarkeit gestatten, so daſs

$$\iint \frac{\partial w}{\partial x} dx\, dy = \int [w]_{x_0}^{x} dy, \quad \iint \frac{\partial w}{\partial y} dx\, dy = \int [w]_{y_0}^{y} dx$$

ist, so ist die Funktion w nebst allen ihren partiellen Differentialquotienten für alle Punkte im Innern dieser Fläche endlich und stetig, und es sind überhaupt keine Ausnahmepunkte vorhanden.

Wird schlieſslich noch die Möglichkeit offen gelassen, daſs auch die Funktion w an irgendwelchen Stellen im Innern des Gebietes zwar endlich bleibt, aber unstetig wird, so gelten alle früheren Sätze, wenn diese Unstetigkeitsstellen so verteilt sind, daſs erstlich die Integrale A_0, A_0, A_k, A_k, B_k, B_k stetige Funktionen von r bleiben, und daſs zweitens, weil der Satz der teilweisen Integration auf jedem Kreise und jedem Radiusvektor angewandt wurde, u und v nur bei Werten von r, die eine diskrete Menge bilden, unstetige Funktionen von ϑ sind, und ebenso nur bei diskreten Werten von ϑ unstetige Funktionen von r. Diesen Forderungen wird genügt, falls die Stellen, an denen die Stetigkeitsbedingung von w nicht erfüllt ist, auf einer beliebigen Kurve nur eine diskrete Menge bilden, und ebenso die Kurven selbst, auf denen sie gelegen sind, nur ein diskretes System zusammensetzen. Unter diesen Bedingungen kann w überhaupt an keiner Stelle im Innern des Gebietes unstetig sein, wenn eine durch Abänderung des Wertes in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist.

Bemerkungen.

Erstes Kapitel.

659. Der Begriff des „Linienelementes“ wurde von S. Lie eingeführt. Eine ausführliche Darstellung dieses Begriffs und seiner Anwendungen findet sich namentlich bei:

Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896.

660. Der Existenzbeweis für die Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen läfst sich auch auf anderer Grundlage führen, wobei die Differentialgleichung, d. h. im einfachsten Falle die Funktion $f(x, y)$ nicht notwendig als analytisch vorausgesetzt zu werden braucht. Dieser Beweis geht ebenso wie der hier gegebene auf Cauchy zurück; er ersetzt die Integralkurve approximativ durch ein Polygon und findet sich z. B. bei:

Lipschitz, Lehrbuch der Analysis Bd. II S. 504 ff.,
Picard, Traité d'analyse, Paris 1891—96, t. II p. 291 ff.,
Jordan, Cours d'analyse, Paris 1893—96, Nr. 77—79,

wo er unmittelbar für Systeme von Differentialgleichungen geführt wird.

661—662. Auch die Existenz der impliciten Funktion einer oder mehrerer Veränderlicher läfst sich durch Integration ihrer Differentialgleichung nach der in der vorstehenden Bemerkung angedeuteten zweiten Cauchyschen Methode beweisen, vergl. die dort angegebene Litteratur. Einen neuen Beweis für die allgemeinste implicite Funktion durch „successive Approximation“ giebt:

H. A. Schwarz, Ber. d. Berl. Akad. 1897, II S. 948—954.

666 ff. Eine ausführlichere Diskussion der Diskriminantenkurve und ihrer Eigenschaft als singulärer Lösung der Differentialgleichung findet sich bei:

Darboux, Bull. d. sciences math. t. IV (1873) p. 158—176.

Zweites Kapitel.

687. Zur Einführung in die Theorie und Anwendungen der elliptischen Funktionen ist zu empfehlen:

R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen, Leipzig 1900, Kap. IV u. V,

sowie für die funktionentheoretische Behandlung besonders:

Jordan, Cours d'analyse II, ch. VI.

693. Über die geometrische Bedeutung des Multiplikators und seine Bestimmung vermöge der infinitesimalen Transformation vergl. hier Nr. 706.

695. Die hier sich ergebenden singulären Punkte sind typisch für die bei Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt auftretenden Singularitäten im Reellen. Eine allgemeine Klassifizierung dieser Singularitäten und weiterer charakteristischer Eigenschaften der Integralkurven in Bezug auf ihren allgemeinen Verlauf findet sich bei:

Picard, Traité d'analyse t. III, ch. IX u. X.

702. Eine allgemeine Theorie der *W*-Kurven, gegründet auf ihre Eigenschaft, Gruppen von projektiven Transformationen zu gestatten, geben:

Klein und Lie, Math. Ann. 4, S. 50—84.

703 ff. Der Begriff der „infinitesimalen Transformation" bildet gemeinsam mit dem Begriff der „Transformationsgruppe" die Grundlage der Lieschen Theorie, die ihre vollständigste Darstellung findet in:

Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1893, I—III.

Elementarer und kürzer ist:

Lie-Scheffers, Vorlesungen über kontinuirliche Gruppen, Leipzig 1893;

und speziell die Anwendung auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen in sehr elementarer Darstellung giebt:

Lie-Scheffers, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891.

712. Über den Begriff der „Berührungstransformation" vergl.

Lie-Scheffers, Berührungstransformationen. (s. o.)

Drittes Kapitel.

718—722. Über Existenztheoreme für Systeme von Differentialgleichungen und implicite Funktionen vergl. die zu den Nrn. 660 bis 662 angegebene Litteratur.

723. Die Theorie der vollständigen Systeme und Gruppen von Integralen giebt in systematischer Darstellung:

Lie-Engel, Transformationsgruppen Bd. I. (s. o.)

728—732. Über Komplexe und Kongruenzen vergl.:

Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme, Journ. f. Math. 57, S. 189—230, sowie

S. Lie, Math. Ann. 5, S. 145—256,

L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, Kap. X, § 122.

732. Den Krümmungslinien der Fläche entsprechen auf der Evolutenfläche geodätische Linien. (Bianchi a. a. O. Kap. IX.)

756. Die Rotationsflächen konstanter negativer und konstanter positiver Krümmung werden durch elliptische Funktionen dargestellt, diskutiert und in ihren Haupttypen abgebildet bei:

Bianchi, Differentialgeometrie § 99 und § 103. (s. o.)

Viertes Kapitel.

760. Die Multiplikatoren einer Differentialgleichung höherer Ordnung behandelte neuerdings:

L. Fuchs, Ber. d. Berl. Akad. 1888, S. 1115—1126.

Fünftes Kapitel.

775. Der angegebene Satz von Sturm ist ein Bestandteil des allgemeinen „Oscillationstheorems", das sich auf eine wichtige Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezieht. Hierüber vergl.:

F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, II. Teil, § 6 ff., sowie namentlich

M. Bôcher, Encyklopädie d. math. Wiss. II A 7a Nr. 2 ff.,

wo auch weitere Litteratur nachgewiesen wird.

792. Solche Systeme linearer Differentialgleichungen treten auf bei der Theorie der kleinen Schwingungen elastischer Systeme. Hierüber:

E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme fester Körper, Leipzig 1898, Bd. II, Kap. VI.

Sechstes Kapitel.

796 ff. Die hier gegebenen Entwickelungen gründen sich auf die Arbeiten von

L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Journ. f. Math., 66 u. 68.

Dagegen ist der in den Nrn. 807—809 gegebene Konvergenzbeweis im wesentlichen entnommen der Darstellung von

L. Heffter, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1894, Kap. IV.

811 ff. Bei dem hier betrachteten Ausnahmefall gleicher oder um ganze Zahlen differierender Wurzeln der determinierenden Gleichung müssen in der Regel in den Integralen logarithmische Glieder auftreten. Hierüber vergl. insbesondere:

Heffter, Einleitung, Kap. VII u. VIII.

811 ff. Eine weit allgemeinere und besonders wichtige Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die in den vorhergehenden Nummern gegebenen Entwickelungen gelten, bietet die Theorie der „hypergeometrischen Funktionen", wie sie in elementarer Darstellung zu finden ist bei:

R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen, Kap. VI § 13 und ausführlicher bei:

Picard, Traité d'analyse t. III, ch. XI, § 14 und ch. XII.

815 ff. Die Darstellung der hypergeometrischen Funktionen durch bestimmte Integrale giebt:

R. Fricke, a. a. O. § 14,

Picard, Traité III, ch. XII, § 6 ff.

Weitere Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen und bestimmten Integralen, insbesondere die Theorie der Laplaceschen Transformation entwickelt:

Picard, Traité III, ch. XIV, § 9 ff.

Siebentes Kapitel.

823. Die geometrische Interpretation der partiellen Differentialgleichungen vermittelst der „Flächenelemente", ihrer „Vereine" und der „charakteristischen Streifen" findet sich in ausführlicherer Darstellung bei:

Lie-Scheffers, Berührungstransformationen, Kap. XI.

851 ff. Über das allgemeine Existenztheorem für Systeme von beliebig vielen partiellen Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen vergl.:

E. Goursat, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891, ch. I.

Jordan, Cours d'analyse, t. III, ch. III.

Picard, Traité II, ch. XI, Nr. 18—20.

Achtes Kapitel.

856 ff. Die Integrationsmethoden für partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung finden sich sehr vollständig bei:

E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Paris 1896,

wo insbesondere im Bd. I, Kap. II auch die Theorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen ausführlich behandelt wird.

866. Eine Einführung in die moderne Theorie der Minimalflächen giebt:

Bianchi, Differentialgeometrie, Kap. XIV u. XV.

867 ff. Für die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf physikalische Probleme, insbesondere auf die Theorie der Wärmeleitung und der Schwingungsprobleme ist zu empfehlen:

Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Braunschweig 1900, I u. II.

Neuntes Kapitel.

Die grundlegenden Arbeiten über Variationsrechnung von Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre und Jacobi finden sich übersetzt und erläutert in:

Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 46 u. 47, herausgegeben von Stäckel, Leipzig 1894.

An Lehrbüchern sind für die älteren, mehr formalen Methoden der Variationsrechnung, auf welche sich unsere elementare Darstellung beschränkt, immer noch zu empfehlen:

J. H. Jellet, Calculus of variations, Dublin 1850, dtsch. von Schnuse 1859.

Moigno-Lindelöf, Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, t. IV (Calcul des variations), Paris 1861.

Eine gedrängte Darstellung mit vielen Litteraturnachweisen bietet:

Pascal-Schepp, Variationsrechnung, Leipzig 1899.

Die erste systematische Darstellung der gesamten Variationsrechnung auf Grund der modernen Methoden aber giebt:

A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900.

Eine elementare Einführung in die moderne Theorie im Verlage dieses Lehrbuches ist in Vorbereitung.

875. Die hier gegebene Interpretation des Variationszeichens δ entspricht im wesentlichen der von Moigno-Lindelöf. Andere Autoren verstehen unter δu das erste Glied des Zuwachses, welchen der Ausdruck u erfährt, wenn α die kleine Änderung ε erleidet, also dasselbe, was wir in unserer Bezeichnungsweise mit $\varepsilon \delta u$ bezeichnen würden. Noch andere wieder definieren die Variation δS eines Integrales als die Glieder erster Dimension, die sich ergeben, wenn man einmal die Funktion $y = f(x)$, dann die wenig veränderte Funktion $y = f(x) + \eta(x)$ in S einsetzt und dann die Differenz dieser beiden Ausdrücke unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $\eta, \eta', \eta'', \ldots$ entwickelt. Die formalen Rechnungsgesetze sind aber bei aller Verschiedenheit der Erklärungen im wesentlichen immer dieselben.

877. Unsere Herleitung der Differentialgleichung beruht auf einer Idee von E. Heine. Will man aber nicht, wie hier geschehen, die Existenz der höheren Ableitungen für die gesuchte Funktion $y = f(x)$ voraussetzen, so mufs man sich der in den Math. Ann., Bd. 15 entwickelten Schlufsweise P. du Bois-Reymonds bedienen, die auf ein abweichendes Verfahren der partiellen Integration gegründet ist. Eine vereinfachte Darstellung dieser Methode von E. Zermelo wird demnächst in den Math. Ann. erscheinen.

878. Interessante Beiträge zur kritischen Untersuchung dieser Aufgabe finden sich zuerst bei:

Moigno-Lindelöf, Leçons etc. Nr. 102—105. (s. o.)

879. Die geometrische Konstruktion der Brachistochrone durch zwei gegebene Punkte findet sich schon bei Joh. Bernoulli. (Ostw. Klass. 46, S. 11.)

893 u. 894. In den beiden hier behandelten Aufgaben erhält man sowohl Maxima als Minima des Integrals je nach der gewählten Lösung der Differentialgleichung. Nur der Einfachheit halber wird im Text allein auf das Minimum Bezug genommen. Die Unterscheidung der Maxima und Minima läfst sich erst mit Hilfe der zweiten Variation oder ähnlicher Hilfsmittel durchführen und wird daher in unserer Darstellung nicht berücksichtigt. Hierüber vergl. die oben nachgewiesene Litteratur.

896. Der Beweis für die am Schlufs angegebene Eigenschaft des Kreises findet sich in geometrischer Form bei:

H. A. Schwarz (Gött. Nachr. 1884; ges. Werke II, S. 327),

als Bestandteil des weitergehenden Beweises, dafs die Kugel unter allen geschlossenen Flächen der gleichen Oberfläche das gröfste Volumen besitzt. Einen sehr einfachen Beweis mit Hilfe der Fourierschen Reihen giebt neuerdings:

Hurwitz, Comptes Rendus CXXII p. 401—403.

898. Es handelt sich hier um das „allgemeine Problem der Variationsrechnung". Dafs auch hier die Multiplikatorenmethode auf die richtigen Differentialgleichungen führt, zeigt:

A. Mayer in den Math. Ann. 26, sowie Turksma (Math. Ann. 47), vergl. auch Kneser, Lehrbuch, Abschn. VII.

900. Die weitere Theorie der geodätischen Linien vom flächentheoretischen Standpunkte ist nachzusehen bei:

L. Bianchi, Differentialgeometrie, Kap. VI.

und findet sich sehr vollständig bei:

G. Darboux, Théorie générale des surfaces, Paris 1887, Livre V u. VI.

902. Die Theorie der „zweiten Variation" wurde begründet von Legendre (Ostw. Klass. 47, S. 57), der das Kriterium zur Unterscheidung der Maxima und Minima aufstellte, und weiter ausgebildet von Jacobi (ibid. S. 77), der zuerst die Beschränkung des Integrationsintervalles für jede Lösung der Differentialgleichung als notwendig für das Bestehen eines Maximums oder Minimums nachwies, und findet sich ausführlich dargestellt z. B. bei:

Moigno-Lindelöf, l. c. Leçon VIII.

Für die neueren Methoden von Weierstrafs dagegen kommt bisher ausschliefslich das genannte Knesersche Lehrbuch, und zwar hauptsächlich in seinem dritten Abschnitte, in Betracht.

Sachregister zu Band III.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern der einzelnen Artikel.)

Berichtigungen zu Band I.

(Vergl. die Berichtigungen am Ende von Band II.)

S. XII, Z. 22 v. u. lies „Evolvente" statt „Evolente".
S. 20, Fig. 14. der Kurvenast rechts sollte sich nicht von der x-Achse entfernen.
S. 21, Z. 4 v. u. lies „N" statt „n".
S. 22, Z. 9 v. o. lies „11" statt „5".
S. 34, Z. 8 v. o. lies „$\sin x$" statt „$\cos x \sin x$".
Z. 10 v. o. lies „1" statt „$\cos x$".
Z. 11 v. o. ist „$\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$ und" zu streichen.
S. 42, Z. 9 v. o. lies „$F(X)$" statt „$F(X_0)$".
S. 44, Z. 11 v. u. ist „$= f'(x, \Delta x)$" zu streichen.
S. 54, Z. 9 v. u. lies „$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$" statt „$\left(\frac{dy}{dy}\right)^2$".
S. 55, Z. 12 v. u. fehlt am Ende die runde Klammer von $f(u, v)$.
S. 57, Z. 5 v. u. lies „Ferner habe $f(u, v)$ nebst den beiden Ableitungen nach u und v in der Umgebung der entsprechenden Stelle u, v bestimmte endliche Werte und sie seien stetig als Funktionen" statt „Ferner ... Funktion".
S. 58, Z. 10 v. u. lies „denen, welche" statt „der, welche".
S. 66, Z. 7 v. o. lies „$= \frac{dx}{dy}$" statt „$= 1$".
S. 71, Z. 10 v. o. Hinter „positiv" füge hinzu: „solange man y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ wählt".
Z. 15 v. o. dasselbe.
Z. 4 v. u. Hinter „bestimmte" füge hinzu: „sofern man sich auf den angegebenen Variabilitätsbereich beschränkt".
Z. 2 v. u. lies „die Ableitung" statt „Ableitungen".
S. 80, Z. 10 v. u. lies zweimal „$f^{(n)}(x)$" statt „$f^{(n)}(y)$".
Z. 1 v. u. lies „(4)" statt „(3)".
S. 91, Z. 4 v. u. lies „$\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma$" statt „$\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma$".
S. 93, Z. 19—21 v. o. „zweiten" und „ersten" zu vertauschen.
Z. 23 v. o. lies am Ende „$uv^{(n+1)}$" statt „$uv^{(n)}$".
S. 95, Z. 6 v. u. lies „und m anderen Veränderlichen $y_1, \ldots y_m$, die für jedes gewählte x aus den m Gleichungen bestimmt sind. Es ist also, weil" statt „und m ... weil".
S. 96, Z. 7 v. o. lies „$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_m}{dx}$" statt „$dy_1, dy_2, \ldots dy_m$".
Z. 7 v. u. In Gleichung (1) fehlt das „=" Zeichen.
S. 97, Z. 7 v. u. lies „das" statt „daß".
S. 98, Z. 1 v. o. lies „Die Einführung anderer unabhängiger" statt „Die Änderung ..".
Z. 4 v. o. Vor der Gleichung fehlt „(1)".
Z. 7 v. o. Vor der Gleichung fehlt „(2)".
Z. 4 v. u. lies „(3'), (4'), (5')" statt „(3), (4), (5)".

S. 99, Z. 4 v. o. lies „$\frac{dy}{dx}=$, $\frac{d^2y}{dx^2}=$, $\frac{d^3y}{dx^3}=$" statt „$y'=$, $y''=$, $y'''=$".
S. 105, Z. 17 v. o. lies „$\frac{\partial u}{\partial y}$" statt „$\frac{du}{\partial y}$".
S. 107, Z. 15 v. o. lies „Funktion u" statt „Funktion du".
Z. 7 v. u. Hinter Gleichung (2) füge hinzu: „wo x, y... unabhängige Variable sein mögen".
S. 108, Z. 6 v. o. lies „72" statt „71".
Z. 15 v. o. lies „83" statt „71".
S. 109, Z. 14 v. o. lies „zusammengesetzte" statt „zusammengesetzten".
S. 116, Z. 12 v. o. lies „dieser Produkte" statt „mit diesen Produkten".
S. 127, Z. 4 v. o. lies „$\frac{\partial u}{\partial r}$" statt „$\frac{du}{\partial r}$".
S. 128, Z. 8 v. o. lies „Funktionen" statt „Funktion".
S. 139, Z. 12 v. o. lies „$|v_k|$" statt „v_k".
S. 143, Z. 12 v. o. lies „auch die vorgelegte Reihe bei diesen Werten von ϱ divergent", statt „auch ... divergent".
Z. 1 v. u. lies „$-1 < x < 1$" statt $-1 < x \leqq 1$".
S. 144, Z. 6 v. o. lies „kleiner oder gröfser" statt „gröfser oder kleiner".
Z. 5 v. u. lies „$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}$" statt „$\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n-3}$".
S. 148, Z. 15 v. o. lies „(1)" statt „(2)".
S. 159, Z. 8 v. u. lies „$+\frac{1}{2!}-$" statt „$+\frac{1}{2!}+$".
S. 162, Z. 13 v. o. lies „nach 0 konvergiert" statt „0 wird".
Z. 14 v. o. lies „schliefslich beliebig klein" statt „schliefslich 0"
S. 177, Z. 1/2 v. o. lies „$\frac{-\frac{1}{h_1^2}f'\left(\frac{1}{h_1}\right)}{-\frac{1}{h_1^2}F'\left(\frac{1}{h_1}\right)}$" statt „$-\frac{\frac{1}{h_1^2}f'\left(\frac{1}{h_1}\right)}{\frac{1}{h_1^2}F'\left(\frac{1}{h_1}\right)}$".
S. 181, Z. 3 v. o. lies „man sagt dann" statt „d. h."
Z. 3 v. u. vor den Bruch ist „$\lim\limits_{x=\infty}$" zu setzen.
S. 182, Z. 5 v. o. lies „nach Analogie von" statt „nach".
S. 189, Z. 13 v. u. fehlt vor $\frac{\partial u}{\partial z}$ die Klammer.
S. 191, Z. 9 v. o. hinter „allen" schiebe ein: „von 0 verschiedenen".
S. 223, Z. 6 v. o. lies „liefert" statt „liefern".
S. 225, Z 14 v. o. lies „$A = 120^\circ$" statt „$\alpha = 120^\circ$".
S. 237, Z. 8 v. u. lies „(115)" statt „(114)".
S. 246, Z. 1 v. u. lies „u_3" statt „x_3".
S. 249, Z. 6 v. o. lies „Tangente" statt „Tangenet".
S. 258, Z. 4 v. o. lies „$a_0 + a_1 x$" statt „$a_0 = a_1 x$".
S. 259, Z. 7 v. u. lies „$b_2 = \frac{1}{2}(\ )_0$" statt „$b_2 = (\ )_0$".
S. 280, Z. 8 v. o. lies „Nr. 199" statt „Nr. 200".
S. 299, Z. 8 v. u. lies „a, b" statt „a_1, b_1".
S. 340, Z. 9 v. u. ist „Verhältnisse der" wegzulassen.
S. 341, Z. 7 v. u. lies „eine Kurve" statt „einer Kurve".
S. 347, Z. 8 v. o. lies „für $\Delta\theta = 0$" statt „für für $\Delta\theta = 0$".
S. 354, Z. 2 u. 4 v. u. lies „$\frac{s'^2}{R}$" statt „$\frac{s'}{R}$".
S. 360, Z. 8 v. o. lies „und der" statt „und die der".
Z. 9 v. o. lies „unserer Fläche" statt „von unserer Fläche"
S. 361, Z. 6 v. u. lies „Konstanten" statt „Konstante".
Z. 3 v. u. lies „(13)" statt „(12)".

S. 361, Z. 1 v. u. lies „z" statt „z_1".
S. 362, Z. 3 v. o. lies „z_1" statt „z".
S. 375, Z. 2 v. u. } S. 376, Z. 9 v. o. } lies „$z = c + \sqrt{}$" statt „$z = \sqrt{}$".
S. 377, Z. 7 v. o. lies „$(1 + y_0'^2 + z_0'^2)'$" statt „$(1 + y_0'^2 + z_0'^2)$".
Z. 7 v. o. lies „z_0'''" statt „z'''".
S. 383, Z. 11 v. u. lies „(11)" statt „(8)".
S. 388, Z. 13 v. o. lies „ds_0 statt „s_0".
S. 392, Z. 3 v. u. lies „$\sqrt{1 - \frac{R^2}{u^2}}$" statt „$\sqrt{1 - \frac{R_2}{u^2}}$".
S. 393, Z. 18 v. o. lies „$\frac{s_2'}{R_2}$" statt „$\frac{s_2'}{R}$".
S. 395, Z. 15 v. o. lies „Nr. 273" statt „Nr. 274".
S. 396, Z. 5 v. u. lies „Nr. 290" statt „Nr. 289".
S. 400, Z. 9 v. u. lies „Nr. 288" statt „Nr. 292".
S. 404, Z. 10 v. u. lies „wir" statt „wie".
S. 429, Z. 6 v. o. „(x, y, z)" hinter „punkte" einzusetzen.
S. 433, Z. 13 v. u. lies „$(1 + p^2 + q^2)^2$" statt „$(1 + p^2 + q^2)$".
S. 442, Z. 15 v. o. lies „$\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1 = 0$".
S. 447, Z. 4 v. o. lies „P_1" statt „P".
S. 469, Z. 12 v. o. } S. 470, Z. 14 v. o. } lies „*windschiefe*" statt „*gekrümmte*".
S. 471, Z. 10 v. o. ist „wenn $a'\beta' - b'\alpha'$ nicht null ist" wegzulassen.
S. 487, Fig. 74: $\overline{Oc_1}$ und $\overline{c_2 c_3}$ müssen gleich und parallel sein.
S. 496, Z. 4 v. u. Vor den beiden ersten Termen fehlt „$\lim\limits_{n=\infty}$".
S. 497, Z. 17 v. o. lies „verschaffen" statt „machen".
S. 499, Z. 11 v. u. lies „ihre Anzahl" statt „ihre Zahl".
S. 500, Z. 2 v. o. lies „$<$" statt „$\leqq$".
Z. 5 v. o. lies „$\leqq \frac{r_1}{r_2}$" statt „$< \frac{r_1}{r_2}$".
S. 507, Z. 10 v. o. lies das erste Mal „$\leqq$" statt „$<$".
S. 509, Z. 1 ff. muß es heifsen: „Wählen wir jetzt eine Zahl r_1 so, dafs $|\zeta| < r_1 < r$ ist und darauf h so, dafs noch $|\zeta| + |h| < r_1$ ist, so wird die Klammer in (5), absolut genommen, $\leqq \cdots$".
Z. 7 v. o. lies das erste Mal „$=$" statt „$<$".
S. 510, Z. 18 v. o. lies das erste Mal „$\leqq$" statt „$<$".
S. 515, Fig. 80. Die kleine 1 neben b_k ist zu streichen.
S. 516, Z. 3 v. u. lies „z^m" statt „$(1 + z)^m$".
S. 517, Z. 6 v. o. lies „$= -1$" statt „$= 1$".
Z. 9. v. u. lies „367" statt „366".
S. 518, Z. 11 v. o. lies „$\psi(x, y)i$" statt „$\psi(x, y)$".
S. 522, Z. 3 v. u. lies „*also die*" statt „*alsodie*".
S. 523, Z. 11 v. o. lies „Ist" statt „Is".
Z. 12 v. o. lies „wir ihr eine" statt „wir eine".
S. 525, Fig. 83 rechts ist falsch gezeichnet: die punktierten Geraden tangieren fälschlicherweise nicht; aufserdem lies rechts oben „$d_1 w$" statt „$\Delta_2 w$" und „$\Delta_2 w$" statt des rechts stehenden „$\Delta_1 w$".
S. 532, Z. 4—1 v. u. Hinter „Konst" ist immer ein Punkt zu setzen.
S. 553, Z. 7 v. u. lies „C. Jordan" statt „J. Jordan".

Berichtigungen zu Band II.

S. 7, Z. 18 v. u. lies „(x_{n-1}, x)“ statt „(x, x_{n-1})“.

S. 8, Z. 8 v. o. lies „$= F_n(x, x_0)$“ statt „$\leq F_n(x, x_0)$“.

Z. 8 v. u. lies „Schwankungen“ statt „Schwankung“.

S. 9, Z. 2 v. u. lies am Schlufs „$x'_{m-1}; x$“ statt „$x'_p; x$“.

S. 12, Z. 7 v. o. lies „$\leq F(x', x_0)$“ statt „$\leq F(x', x)$“.

Z. 9 v. o. lies „$\overline{F}(x', x_0) =$“ statt „$\overline{F}(x', x) =$“.

S. 32, Z. 1 v. o. ist „$\int_{x_0}^{x} u_0\,dx +$“ vorn hinzuzufügen.

S. 33, Z. 18 v. u. sowie Z. 8 v. u. lies „gliedweise“ statt „teilweise“.

S. 41, Z. 10 v. o. lies „Beispiel“ statt „Beispiele“.

S. 42, Z. 2 v. u. lies „$F(x, X)\,dx$“ statt „$F(x, X)\,dt$“.

S. 53, Z. 10 v. o. lies „Funktionen“ statt „Funktion“.

S. 55, Z. 1 v. u. lies im Nenner des Bruches „μ^2“ statt „λ^2“.

S. 59, Z. 8 v. o. Bei dem Integral links lies „$x^2 dx$“ statt „dx“.

S. 71, Z. 7 v. o. lies „$-\cos$“ statt „$\cos$“.

S. 76, Z. 7 v. o. lies „447“ statt „455“.

S. 79, Z. 11 v. o. lies „ds“ statt „dx“.

S. 80, Z. 10 v. u. lies „Nr. 417“ statt „Nr. 457“.

S. 85, Z. 9 v. u. lies „Anwendung.“ statt „Anwendungen . 1“.

S. 87, Z. 7 v. o. lies „$l\left(\frac{k+1}{k}\right)$“ statt „$l\left(\frac{k+1}{k}x\right)$“.

Z. 9 v. o. lies „487“ statt „498“.

S. 97, Z. 8 v. o. lies „$\sin^{m+1} x$“ statt „$\sin^{m+1}$“.

S. 101, Z. 10 v. u. lies „$-x^{-p}$“ statt „$-x^{-}$“.

S. 105, Z. 4 v. o. Am Schlufs sind noch Punkte „. . .“ zu setzen.

S. 111, Z. 7 v. o. Im 2. Integranden lies „$\partial\alpha$“ statt „$d\alpha$“.

S. 122, Z. 8 v. o. lies „Gliedes“ statt „Koeffizienten“.

S. 124, Z. 7 v. u. lies „$= \mp$“ statt „$= \pm$“.

S. 168, Z. 14 v. o. lies „$\Gamma(1+x) \cdot \Gamma(1-x)$“ statt „$\Gamma(1+x) + \Gamma(1-x)$“.

S. 177, Z. 10 v. o. lies „$\overline{2}7{,}037175$“ statt „$\overline{2}7{,}047175$“.

S. 196, Z. 15 v. u. Der Satz „Der Betrag . . . $2d$“ ist zu streichen.

S. 205, Z. 8 v. o. lies „$|s| < \sigma$“ statt „$|s| < 0$“.

S. 206, Z. 7 v. o. lies „548“ statt „549“.

S. 207, Z. 15 v. u. lies „222“ statt „221“.

S. 209, Z. 10 v. o. lies „k^4“ und „k^6“ statt „$3k^4$“ und „$5k^6$“.

S. 221, Z. 7 v. o. lies im Nenner von $\sin\lambda'$ „$\sqrt{n(n+2)}$“ statt „$\sqrt{n(n+1)}$“.

S. 227, Z. 5 v. u. lies „(10)“ statt „(1)“.

S. 259, Z. 7 v. o. lies „F“ statt „S“.

S. 260, Z. 8 v. u. lies „$f'_x(\overline{x}, y)$“ statt „$f'_x(x, y)$“.

S 286, Z. 1 v. u. lies „$2\pi c^2$“ statt „$2\pi b^2$“.

S. 308, Z. 1 v. o. lies „$X_2^{(1)} dx_2$“ statt $X_2^{(1)} dx_1$“.

S. 311, Z. 1 v. u. lies „$\int_{a}^{c}$“ statt „$\int^{c}$“.

S. 312, Z. 4 v. u. lies „linken“ statt „rechten“.

S. 313, Z. 13 v. o. ist links ein „$-$“ zuzufügen.

S. 317, Z. 14 v. o. lies „in“ statt „in in“.

S. 326, Z. 14 v. u. lies „VII“ statt „VI“.

S. 330, Z. 13 v. o. lies „a“ statt „$\mathfrak{U}$“.

S. 331, Z. 11 v. u. lies „Weg um den Nullpunkt“ statt „Weg“.

S. 334, Z. 1 v. o. lies „$-\int_b^a f(z)\,dz$“ statt „$\int_b^a f(z)\,dz$“.
S. 340, Z. 5 v. o. lies „πi“ statt „$2\pi i$“.
Z. 12 v. o. lies „1“ statt „l“.
S. 343, Z. 1 v. o. lies „U“ statt „$\mathfrak{U}$“.
S. 345, Z. 3 v. u. lies „als $|z|$“ statt „als z“.
S. 346, Z. 2 v. o. lies „(2)“ statt „(5)“.
Z. 4 v. u. lies „$\frac{1}{\zeta - z}$“ statt „$\frac{1}{z - \zeta}$“.
S. 363, Z. 5 v. o. Im Nenner des Bruches lies „$f'^{2}(z_0)$“ statt „$f^{2}(z_0)$“.
Z. 10 v. o. lies „$D_{z_0}^2$“ statt „$D_{z_0}^n$“.
S. 365, Z. 4 v. u. lies „$1-\sqrt{1-2wz_0+w^2}$“ statt „$-\sqrt{1-2wz_0+w^2}$“.
S. 366, Z. 15 u. 17 v. o. lies „$g(\zeta)^n$“ statt „$f(\zeta)^n$“.
S. 419, Z. 1 v. u. lies „de“ statt „du“.
S. 424, Z. 1 v. u. lies „$\mathfrak{K}$ 639, $\mathfrak{L}$ 655“ statt „$\mathfrak{K}$ 655“.
S. 426, Z. 14 v. o. lies „= Integral 399“ statt „= Integrand 399“.

Berichtigungen zu Band III. (Lieferung 1.)

S. 7, Z. 6 v. o. lies „$y=\varphi(x, y_0)$“ statt „$x=\varphi(x, y_0)$“.
Z. 8 v. u. lies „$2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y_0'$“ statt „$2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y_0'^2$“.
S. 10, Z. 11 v. o. „y_0“ ist zu streichen.
S. 25, Fig. 4, die „3“ ist weiter nach links von X wegzurücken.
S. 26. Fig. 5, die gezeichneten Parabeln müssen alle die cubische Parabel berühren.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.



